# 3年数学予習シート　■置換積分法■



## 置換積分法

次の手順に従って積分を計算する方法を，**置換積分法**という。

**● 置換積分法の手順 ●**

① ある部分の $x$ の式を，$t$ とおく。($u$ とおくこともある。何でもよい)

② ①でおいた式を $x = \ldots$ に変形し，$\dfrac{dx}{dt}\left(\text{または } \dfrac{dt}{dx}\right)$を計算する。

③ ②のことを，元の式に代入し，不定積分を $t$ だけの式にする。

④ ③で作った式を計算し，$t$ の式で答えを出す。

⑤ $t$ を元に戻し，$x$ の式で答える。

**例** $\displaystyle\int x(1-x)^5dx$ を，置換積分法で計算する。

① $t = 1 - x$ とおく。

② ①より，$x = 1 - t$。これより，$\dfrac{dx}{dt} = -1$(だから，$dx = -dt$)

③ 問題の式に②のことを代入して，$\displaystyle\int (1-t)t^5(-dt)$

④ ③を計算して，$\displaystyle\int (-t^5 + t^6)dt = -\frac{1}{6}t^6 + \frac{1}{7}t^7 + C = -\frac{1}{42}t^6(6t-7) + C$

⑤ $t$ を元に戻して，$-\dfrac{1}{42}(1-x)^6(6x+1) + C$

**問題1** 次の不定積分を求めよ。 (➡教科書 p.135　問 6)

(1) $\displaystyle\int x(2x+3)^4\,dx$　(2) $\displaystyle\int x\sqrt{1+x}\,dx$　(3) $\displaystyle\int \frac{x}{(2x+3)^2}\,dx$

**問題2** [　　] 内に示した置換によって，次の不定積分を求めよ。 (➡教科書 p.135　問 7)

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+1}$　$[e^x = t]$　(2) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}\,dx$　$[\log x = t]$

**問題3** 次の不定積分を求めよ。 (➡教科書 p.135　問 8)

(1) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3-4}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int (e^x+1)^2 e^x\,dx$　　(3) $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx$

**$\boldsymbol{\dfrac{f'(x)}{f(x)}}$ の形の積分**

$\dfrac{\cos x}{\sin x}$ や $\dfrac{2x-2}{x^2-2x+3}$ のような形の積分では，分母を $u$ とおくとよい。

$\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx \cdots$ ①　について，$u=f(x)$ とおくと，$\dfrac{du}{dx}=f'(x)$(だから，$du=f'(x)dx$)。

よって①は，$\displaystyle\int \frac{1}{u}du=\log|u|+C$。　$\displaystyle\therefore \int \boldsymbol{\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|+C}$　$\cdots(*)$

※ 今後，$(*)$ は公式として用いて構わない。

**問題4** 次の不定積分を求めよ。 (➡教科書 p.136　問 9)

(1) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x-1}dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\tan x}$