



3年数学予習シート ■部分積分法■

11

部分積分法

微分法の積の公式より、 $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ であるから、

$$f(x)g'(x) = (f(x)g(x))' - f'(x)g(x)$$

この式の両辺を積分して、次のことが得られる。

● 部分積分法 ●

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

部分積分法のコツ … 微分すると定数になる方を $f(x)$ として選ぶ。

例 $\int x \cos x dx$

x を $f(x)$, $\cos x$ を $g'(x)$ と見る。このとき $g(x) = \sin x$ である。

$$(与式) = \int x(\sin x)' dx = x \sin x + \int (x)' \sin x dx$$

問題1 次の不定積分を求めよ。

(→教科書 p.137 問 10)

$$(1) \int (2x-1)(x+1)^3 dx \quad (2) \int xe^{2x} dx \quad (3) \int x \log x dx \quad (4) \int x \sin x dx$$

いろいろな積分(三角関数の積和変換、半角公式)

思い出して下さい。(→数II教科書 p.72, 77)

半角の公式 $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$, $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$

積を和に直す公式 $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}$,

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \},$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \}$$

問題2 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \sin^2 x dx$

(2) $\int \cos x \cos 2x dx$

いろいろな積分 (部分分数に分ける)

分母が因数分解できる分数の場合、それを $\frac{a}{x+b}$ の形に分解することができる。

例 $\frac{x-8}{x^2-x-2}$

分母を因数分解して、 $\frac{x-8}{(x+1)(x-2)}$ 。これを $\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2}$ の形に分解する。

$$\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2} = \frac{a(x-2) + b(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{(a+b)x + (-2a+b)}{(x+1)(x-2)}$$

これが $\frac{x-8}{(x+1)(x-2)}$ と一致すればよいから、 $a+b=1$, $-2a+b=-8$ $\therefore a=3$, $b=-2$

$$\text{よって, } \frac{x-8}{x^2-x-2} = \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-2}$$

問題3 部分分数に分けることにより、次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{x}{x^2-1} dx$

(2) $\int \frac{x+2}{x^2-4x+3} dx$