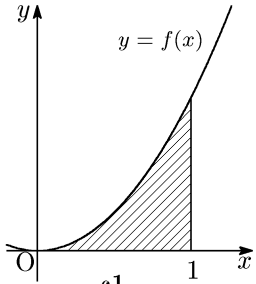
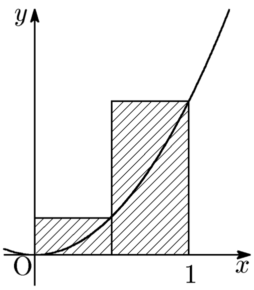
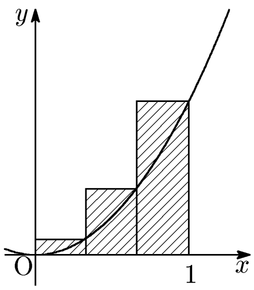
区分求積法



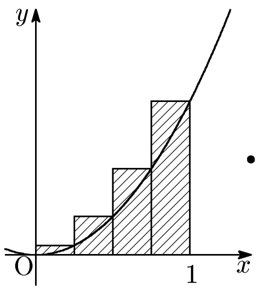
$$\int_0^1 f(x)\,dx$$



[2 分割]

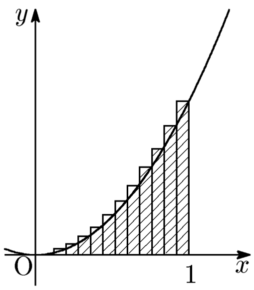


[3 分割]



[4 分割]

……　分割を細かく



[n 分割]

曲線を覆うような長方形をなるべく細かく作成し，1 つ 1 つの面積を合計すれば，かなり正確な面積を求めることができる。区間を 2 分割したものよりは 3 分割，それよりは 4 分割したもの方が，実際の面積に近い。

区間を n 分割したとき，それぞれの長方形の横の長さは $\dfrac{1}{n}$ であり，長方形の高さは左から順に

$f\left(\dfrac{1}{n}\right)$，$f\left(\dfrac{2}{n}\right)$，$f\left(\dfrac{3}{n}\right)$，$\cdots\cdots$ $f\left(\dfrac{n}{n}\right)$ となるから，

長方形の合計は

$$\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)+\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{3}{n}\right)+\cdots\cdots+\frac{1}{n}f\left(\frac{n}{n}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)}$$

実際の面積は，分割の数を限りなく大きくしたもの，つまり，$n\to\infty$ のときであるから，

$$\boldsymbol{S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)}$$

よって，次のことが成り立つ。

● 区分求積法 ●

$$\boldsymbol{\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)}$$

$$\boldsymbol{=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right\}}$$

問題1　次の極限値を求めよ。

(➡教科書 p.153　問 13)

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+4}+\cdots\cdots+\frac{1}{3n}\right)$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$