定積分と不等式

次のことが成り立つ。

● 定積分と不等式 ●

$a \leqq x \leqq b$ において

1. $f(x) \geqq 0$ ならば，　$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqq 0$
2. $f(x) \geqq g(x)$ ならば，　$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b g(x)\,dx$
3. $m \leqq f(x) \leqq M$ ならば，　$\displaystyle m(b-a) \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq M(b-a)$

Q.　1 , 2 で，等号が成り立つのはどのような場合か。

恒等的とは …

問題 1　$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$1 \leqq x^3+1 \leqq x^2+1$ であることを用いて，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(➡教科書 p.154　問 15)

$$\frac{\pi}{4} < \int_0^1 \frac{dx}{x^3+1} < 1$$

問題2 (1) 定積分を利用して，次の不等式が成り立つことを証明せよ。 (➡教科書 p.155　例題 10)

$$\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n}$$

(2) $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dx}{x}$ と $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dx}{k+1}$ とを比べることにより，$n \geqq 2$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。 (➡教科書 p.155　問 16)

$$\log n > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\cdots + \frac{1}{n}$$