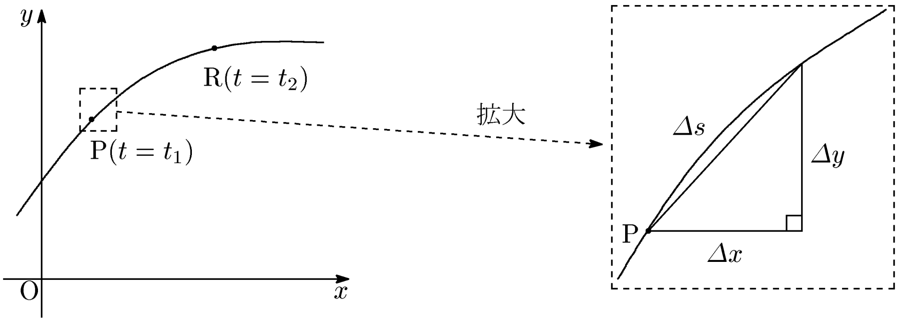
道のり



媒介変数 t を用いて表された曲線 $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$ がある。この曲線の点 $\mathrm{P}(t=t_1$ の地点) から点 $\mathrm{R}(t=t_2$ の地点) までの部分の長さ s を求めよう。

点Pから曲線が Δt だけ変化したとき，曲線の長さが Δs，x 軸方向に Δx，y 軸方向に Δy だけ増加したとする。

Δt がきわめて小さければ，図の拡大図のように，$\Delta s \fallingdotseq \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ と考えてよいから，

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \fallingdotseq \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$$

ここで，$\Delta t \to 0$ とすると，$\dfrac{\Delta x}{\Delta t} \to$ ＿＿＿＿，　$\dfrac{\Delta y}{\Delta t} \to$ ＿＿＿＿ だから，

$$\frac{ds}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

よって，$t=t_1$ の地点から $t=t_2$ の地点までの道のり s は

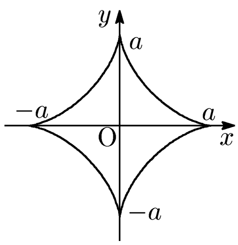
$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

● 曲線の長さ (1) ●

曲線上の点が媒介変数 t を使って，$x=f(t)$，$y=g(t)$　$(t_1 \leqq t \leqq t_2)$ と表されているとき，曲線の長さ s は

$$\boldsymbol{s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt}$$

問題1　a を正の定数とするとき，曲線 $x=a\cos^3\theta$，$y=a\sin^3\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ は右の図のようになる。この曲線の長さを求めよ。(➔教科書 p.174　問 7)



曲線 $y=f(x)$ は，媒介変数 t を用いて　$x=t$，$y=f(t)$ と表すことができるから，先の公式を適用すると，次のことが成り立つ。

● 曲線の長さ (2) ●

曲線 $y=f(x)$ の，$a \leqq x \leqq b$ での長さ s は

$$\boldsymbol{s=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx}$$

※この公式により，媒介変数で表されていない (普通の) 曲線の長さも求めることができる。

問題2　曲線 $y=x^{\frac{3}{2}}$ の $0 \leqq x \leqq \dfrac{4}{3}$ の部分の長さを求めよ。　(➡教科書 p.175　問 8)

問題3　曲線 $y=\log(1-x^2)$ の $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ の部分の長さを求めよ。(➡教科書 p.175　練習 4)