

# 数学牧場

整数



180を素因数分解すると、 $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ となる。180という整数は、2個の「2」、2個の「3」、1個の「5」という合計5個の「部品」でできている。この「部品」の一部を使ってできる数が約数である。

$$2 \times 3 = 6, 2^2 \times 5 = 20, 3^2 \times 5 = 45, \dots$$

つまり、180の約数は、全て $2^a \times 3^b \times 5^c$ という形で表現できる。 $a$ に入る可能性がある数は0, 1, 2の3通り、同様に $b$ は3通り、 $c$ は2通りであるから、約数の作り方は全部で $3 \times 3 \times 2 = 18$ 、すなわち、約数は18個あることになる。約数について、以下のことを確認しておこう。

## 約数

整数  $N$  が、 $N = x^a \times y^b \times z^c$  と素因数分解されるとき、

$N$  の約数の個数は  $(a+1)(b+1)(c+1)$  個

$N$  の約数の総和は  $(x^0 + x^1 + x^2 + \dots + x^a)(y^0 + y^1 + y^2 + \dots + y^b)(z^0 + z^1 + z^2 + \dots + z^c)$

## 公約数と公倍数

例えば2つの整数450と840について、素因数分解すると、

$$450 = 2 \times 3^2 \times 5^2, \quad 840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$$

最大公約数は、2つの数の少ない方の部品を集めたもので、 $2 \times 3 \times 5 = 30$

最小公倍数は、2つの数の多い方の部品を集めたもので、 $2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 = 12600$

2つの自然数  $A, B$  について、最大公約数を  $G$ 、最小公倍数を  $L$  とすると、

①  $A = Ga, B = Gb$  とおける。 $(a, b)$  は自然数で、互いに素)

②  $L = Gab$       ③  $AB = GL$

**問題1** 2つの整数45と120について、次の問いに答えよ。

(1) 最大公約数  $G$  と、最小公倍数  $L$  を求めよ。

(2)  $L$  の約数の個数と、約数の総和を求めよ。

(3) 最大公約数が  $G$  で、最小公倍数が480となるような、2つの自然数の組をすべて求めよ。

## 2元1次不定方程式

[大原則]  $a, b$  の最大公約数が  $n$  のとき、 $ax + by = n$  の整数解  $x, y$  が存在する。

※解は1組ではない。無数に存在する。

### 【解き方】

① 何か具体的に  $(x, y)$  の答を1組見つける。 ※問かないときは、ユークリッドの互除法を利用して計算。

② ①で見つけた答が  $(x_1, y_1)$  だったとして、2つの式  $ax + by = n, ax_1 + by_1 = n$  の差を取ると、 $a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$  という式にする。

③ ②を更に  $a(x - x_1) = b(-y + y_1)$  の形にし、 $x - x_1 = bk, -y + y_1 = ak$  ( $k$  は整数) とおく。

④  $x = x_1 + bk, y = y_1 - ak$  が解となる。

**問題2** 次の不定方程式を解け。

(1)  $6x + 11y = 1$

(2)  $5x - 8y = 2$

(3)  $510x + 119y = 17$

## p進法

①  $p$  進法で  $abc.de$  と表される数は、10進法に直すとき

$$a \times p^2 + b \times p^1 + c \times p^0 + d \times p^{-1} + e \times p^{-2}$$

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 35} \quad \text{余り} \\ \underline{30} \phantom{0} \\ 5 \phantom{0} \end{array}$$

② 10進法の数を  $p$  進法に直すには、 $p$  で割った余りを逆に読めばよい。

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 11} \quad \dots 2 \\ \underline{3} \phantom{0} \\ 8 \phantom{0} \end{array}$$

(例) 23 を3進法に直す。

右図のように23を3で割った余りを書きだし、下から(最後の商から)

上に向かって読む。答えは  $1022_{(3)}$

下から読む

**問題3** 次の問いに答えよ。

(1) 四進数の  $203.1$  を、十進法の小数に直せ。

(2) 十進数の  $387$  を、五進法に直せ。

(3)  $\frac{304}{27}$  を三進法の小数に直せ。