2年数学特別講座　　平面ベクトルの表現の手順

どんな平面ベクトルも，あらかじめ与えられた2つのベクトルを用いて表現ができる。これを平面ベクトルの**分解**という。ベクトルを用いた図形問題ではあらゆるベクトルを，あらかじめ用意した2つのベクトルで表現することがポイントとなる。

ベクトルの表現は，以下の手順に沿って行う。

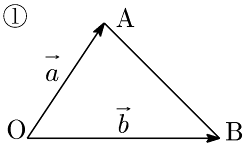
1．基点の確認

基点とは，あらかじめ与えられた2つのベクトルの始点のことである。これは問題を見れば分かる。

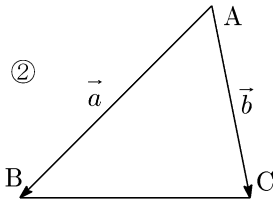
もしあらかじめベクトルが与えられていないときは自分で基点を決め，そこから始まるベクトルを2本用意しておくこと。

[例]　①の基点はO　②の基点はA

①



②



①，②ともに，あらかじめ与えられたベクトルは $\vec{a}$ と $\vec{b}$ である。

これから先，色々なベクトルをこの2本のベクトルだけで表現することが目標である。

2．あらゆるベクトルを基点から始まるものに分解

例えば基点がAだとすると，この問題で出てくる全てのベクトルをAから始まるものに直す。そのとき使うのが，

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{XY}} = \overrightarrow{\mathbf{AY}} - \overrightarrow{\mathbf{AX}}}$$

という式である。この式を知っていれば，どんなベクトルでも自分の好きな基点にそろえられる。

[例] (1) 基点がAの問題であれば，

$\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ →そのままでOK　　$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ →「$-\overrightarrow{\mathrm{AC}}$」　　$\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ →「$\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$」

(2) 基点がCの問題であれば，

$\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ →「$\overrightarrow{\mathrm{CM}}-\overrightarrow{\mathrm{CA}}$」　　$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ →そのままでOK　　$\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ →「$\overrightarrow{\mathrm{CD}}-\overrightarrow{\mathrm{CB}}$」

※ここに挙げたように，同じベクトルでも基点が違えば分解の仕方は違う。

3．終点がどんな点かを読み取る

分解が終わり，ベクトルが基点にそろったはずである。そろえたあと「$\overrightarrow{\mathrm{AM}}$」というベクトルができたのなら，「**Mはどんな点か**」ということを読み取ろう。

次のどれかになるはずである。

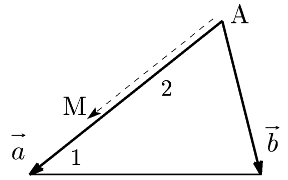
① Mは与えられたベクトルを実数倍した終点
② Mは中点
③ Mは内分点，外分点
④ Mは重心
⑤ Mは線分上の点 ･･･ 内分比が分からない

４．読み取ったことを式にして完成

上の３．について，具体的に見ていこう。

<u>① M は与えられたベクトルを実数倍した終点</u>

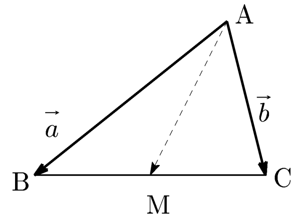
[例]　右の図で，$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \dfrac{2}{3}\vec{a}$



<u>② M は中点</u>

[例]　右の図で，M は線分 BC の中点

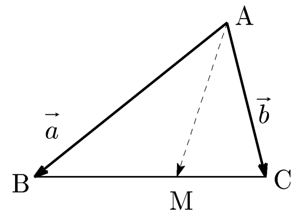
$$\to \overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$



<u>③ M は内分点，外分点</u>

[例]　右の図で，M は線分 BC を 3 : 2 に内分する点

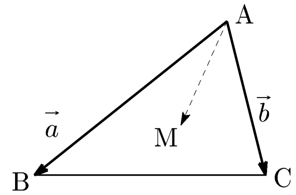
$$\to \overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3+2} = \frac{2\vec{a} + 3\vec{b}}{5}$$



<u>④ M は重心</u>

[例]　右の図で，M は△ ABC の重心

$$\to \overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3}$$



<u>⑤ M は線分上の点 ⋯ 内分比が分からない</u>

[例]　右の図で，M は 3 つの線分上の点だとみなせる。

・M は線分 BF 上の点　$\to$ $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ とおける。

・M は線分 CD 上の点　$\to$ $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = s\overrightarrow{\mathrm{AC}} + (1-s)\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ とおける。

・M は線分 AE 上の点　$\to$ $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = k\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ とおける。

※いずれも，見た目こそ違うが $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ である。

　この後，係数比較をすれば s，t，k の値は求められる。