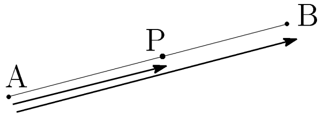
3点A，B，Pが同一直線上にあるための条件

●3点A，B，Pが同一直線上にあるための条件(1)●

$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ となる実数 t がある。



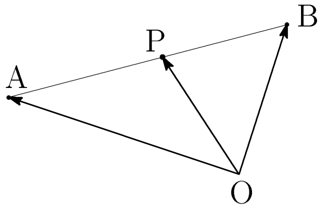
上の条件式は点Aを基準として作ったものである。この式を外部の点Oを基準として作り変えてみると

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = t(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$$
$$\therefore \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} - t\overrightarrow{OA} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$$

つまり，$\overrightarrow{OA}$ の係数と $\overrightarrow{OB}$ の係数を足して1になればよい，ということになるから，3点A，B，Pが同一直線上にある条件は，$s = 1 - t$ とおくことにより，次のように書き換えられる。

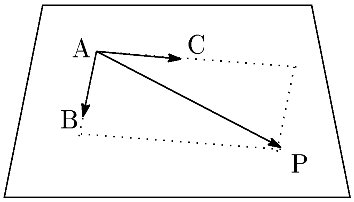
●3点A，B，Pが同一直線上にあるための条件(2)●

$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$　ただし，$s + t = 1$

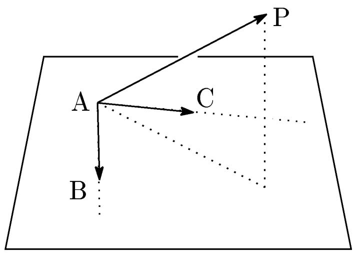


4点A，B，C，Pが同一平面上にあるための条件

空間にある4点は同じ平面上にあるとは限らない。



[4点が同一平面上にある]



[4点が同一平面上にない]

もし，上左図のように4点が同一平面上にあるとしたら，$\overrightarrow{AP}$ は，$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ を用いて分解することができる。つまり，

$$\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \qquad (s,\ t \text{は実数})$$

と表すことができる。しかし上右図のように4点が同一平面上になく，$\overrightarrow{AP}$ だけが平面から浮き上がってしまっていたら，どんなに頑張っても $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ だけでは表現できない。つまり，次のようにまとめられる。

●4点A，B，C，Pが同一平面上にあるための条件(1)●

$\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ となる実数 s，t がある。

上の条件式は点 A を基準として作ったものである。この式を外部の点 O を基準として作り変えてみると

$$
\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\
&\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = s(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) + t(\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) \\
&\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OB}} - s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}} - t\overrightarrow{\mathrm{OA}} \\
\therefore\ &\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}}
\end{aligned}
$$

つまり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の係数を足して 1 になればよい，ということになるから，4 点 A，B，C，P が同一平面上にある条件は，$r = 1-s-t$ とおくことにより，次のように書き換えられる。

● 4 点 A，B，C，P が同一平面上にあるための条件 (2) ●

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}} = r\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}}} \quad \text{ただし，} \boldsymbol{r+s+t=1}$$

問題 1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC の内部に点 P があって，等式 $2\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} + 2\overrightarrow{\mathrm{BP}} + 3\overrightarrow{\mathrm{CP}} = \vec{0}$ が成り立っている。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ。

(2) 直線 OP と底面 ABC との交点を Q とする。OP : PQ を求めよ。