和の記号 $\overset{シグマ}{\sum}$

数列の和を表すのに，記号 $\sum$ を使って，次のように書くことがある。

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n$$

$$\sum_{k=\square}^{\triangle} (k^2+3k) \iff$$

[意味]：式の k の所に，□から△までの整数を，順番に代入してできる数を，すべて足したもの

例 1 一般項が $a_n = 3n-2$ である数列の，初項から第5項までの和 …… $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(3k-2)$

$$\sum_{k=1}^{5}(3k-2) = \square + \square + \square + \square + \square$$

例 2 一般項が $a_n = n^2$ である数列の，初項から第 n 項までの和 …… $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \square + \square + \square + \cdots\cdots + \square$$

問題 1 次の和を $\sum$ を使わないで表せ。 (吉教科書 p.72 問 3)

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{7}(2k-5)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2\cdot 3^k$

(3) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(j^2+1)$

例 3 $1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+99^2$ は，一般項が ＿＿＿＿＿＿ である数列の初項から第 ＿＿＿＿ 項までの和であるから，$\sum$ を使って表すと

$$1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+99^2 = \sum_{\square}^{\square} \boxed{}$$

問題2 次の和を $\sum$ を使って表せ。 (吉教科書 p.72　問 4)

(1) $2+6+18+\cdots\cdots+486$

(2) $1\cdot3+3\cdot5+5\cdot7+\cdots\cdots+(2n-1)(2n+1)$

● 重要 よく使う $\sum$ の公式 ●

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1),\qquad \sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} r^{k-1}=\frac{1-r^n}{1-r}\quad ただし，r \neq 1$$

次の $\sum$ の性質は，よく用いられる。

● $\sum$ の性質 ●

$\boxed{1}$　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$　($\sum$ を分配してもよい)

$\boxed{2}$　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$　(定数は $\sum$ の前に出してよい)

また，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}=\underbrace{1+1+\cdots\cdots+1}_{n\text{ 個}}=\boldsymbol{n}$，　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathbf{2}=\underbrace{2+2+\cdots\cdots+2}_{n\text{ 個}}=\boldsymbol{2n}$，

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathbf{3}=\underbrace{3+3+\cdots\cdots+3}_{n\text{ 個}}=\boldsymbol{3n}$，$\cdots\cdots$

問題3 次の和を求めよ。 (吉教科書 p.73　問 6)

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2-k-2)$　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k^3+1)$　(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}3^k$