2年数学特別講座

和の記号 $\sum$（シグマ）

数列の和を表すのに，記号 $\sum$ を使って，次のように書くことがある。

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n$$

$$\sum_{k=\square}^{\triangle} (k^2 + 3k) \iff$$

[**意味**] ： 式の k の所に，□から△までの整数を順番に代入して，出来た数をすべて足せ！

$\sum$ を普通の和の式に直す

例 1 $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(3k-2) = \underset{k=①}{\overset{\uparrow}{2}} + \underset{k=2}{\overset{\uparrow}{4}} + \underset{k=3}{\overset{\uparrow}{6}} + \underset{k=4}{\overset{\uparrow}{8}} + \underset{k=⑤}{\overset{\uparrow}{10}}$

例 2 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1} = \underset{k=①}{\frac{1}{2}} + \underset{k=2}{\frac{2}{3}} + \underset{k=3}{\frac{3}{4}} + \cdots\cdots + \underset{k=ⓝ}{\frac{n}{n+1}}$

問題 1 次の式を $\sum$ の記号を用いない形で表せ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=2}^{7}(2k-5)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} 2\cdot 3^k$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$

(6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k+a}{k^2}$

(7) $\displaystyle\sum_{k=4}^{n} \log_2(k-3)$

(8) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k-n+1)$

普通の和の式を $\sum$ に直す

今から行うのは，左ページとは逆の作業である。つまり，普通の和の式を $\sum$ を用いて表す作業である。これは次の手順に沿って行う。

① 和を作っている数列の，**第 $\boldsymbol{k}$ 項** を k の式で表す。
　(一般項を求めて，n を k に変えればよい。)
② k を何から何まで変化させればよいか，和の式を見て読み取る。
③ $\sum$ の後ろに①を，上下に②を書き込んで完成。

では上の手順に沿って，和を $\sum$ で表してみよう。

例 3 $1+4+7+10+13+16+19$

[手順①] この数列は初項が 1，公差が 3 の等差数列だから，一般項は $1+(n-1)\cdot 3=3n-2$。
だから第 k 項は $\boldsymbol{3k-2}$

[手順②] 和は 1 から始まって，19 で終わっている。「$3k-2$」が 1 になるのは $\boldsymbol{k=1}$ のときで，
19 になるのは $\boldsymbol{k=7}$ のときである。

[手順③] ①，②より，$1+4+7+10+13+16+19=\sum_{k=1}^{7}(3k-2)$

例 4 $3+1+(-1)+(-3)+(-5)+\cdots\cdots+(-2n+5)$

[手順①] この数列は初項が 3，公差が -2 の等差数列だから，一般項は $3+(n-1)\cdot(-2)=-2n+5$。
だから第 k 項は $\boldsymbol{-2k+5}$

[手順②] 和は 3 から始まって，$-2n+5$ で終わっている。「$-2k+5$」が 3 になるのは $\boldsymbol{k=1}$ のときで，
$-2n+5$ になるのは $\boldsymbol{k=n}$ のときである。

[手順③] ①，②より，$3+1+(-1)+(-3)+(-5)+\cdots\cdots+(-2n+5)=\sum_{k=1}^{n}(-2k+5)$

例 5 $2+6+18+54+162+\cdots\cdots+2\cdot 3^{n-1}$

[手順①] この数列は初項が 2，公比が 3 の等比数列だから，一般項は $2\cdot 3^{n-1}$。
だから第 k 項は $\boldsymbol{2\cdot 3^{k-1}}$

[手順②] 和は 2 から始まって，$2\cdot 3^{n-1}$ で終わっている。「$2\cdot 3^{k-1}$」が 2 になるのは $\boldsymbol{k=1}$ のときで，
$2\cdot 3^{n-1}$ になるのは $\boldsymbol{k=n}$ のときである。

[手順③] ①，②より，$2+6+18+54+162+\cdots\cdots+2\cdot 3^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}2\cdot 3^{k-1}$

例 6 $1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+4\cdot 6+\cdot+\cdots\cdots+98\cdot 100$

[手順①] この数列の第 k 項は $\boldsymbol{k(k+2)}$ である。

[手順②] 和は $1\cdot 3$ から始まって，$98\cdot 100$ で終わっている。「$k(k+2)$」が $1\cdot 3$ になるのは $\boldsymbol{k=1}$
のときで，$98\cdot 100$ になるのは $\boldsymbol{k=98}$ のときである。

[手順③] ①，②より，$1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+4\cdot 6+\cdot+\cdots\cdots+98\cdot 100=\sum_{k=1}^{98}k(k+2)$

問題2 次の和を記号 $\sum$ を用いて表せ。

(1) $3+4+5+6+7$

(2) $1+3+9+27+81+\cdots\cdots+3^{n-1}$

(3) $4+10+16+22+\cdots\cdots+(6n-2)$

(4) $\dfrac{1}{1}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{7}+\dfrac{5}{9}+\cdots\cdots+\dfrac{38}{75}$

(5) $1^2+2^3+3^3+4^3+\cdots\cdots+(n-1)^3$

(6) $1\cdot n+2(n-1)+3(n-2)+4(n-3)+\cdots\cdots+(n-1)\cdot 2+n\cdot 1$