文系センター試験特別講座

確率変数と確率分布

ある試行によって値が決まる変数 X を**確率変数**といい，確率変数と確率との対応関係を**確率分布**という。

例 1 コインを 2 枚投げたとき，表が出る枚数を X とする。
このとき，X の確率分布は右の表のように表される。

X	0	1	2	計
p	$\frac{1}{4}$	$\square$	$\square$	1

例 2 3 枚の 10 円硬貨を同時に投げるとき，表の出た硬貨の金額を Y 円とする。
このとき，Y の確率分布は右の表のように表される。

Y	0	10	20	30	計
p	$\frac{1}{8}$	$\square$	$\square$	$\frac{1}{8}$	1

平均 (期待値) と分散，標準偏差

● 平均 (期待値) $E(X)$ ●

確率変数 X の確率分布が右の表で表されているとき，
X の平均 (期待値) は次のように計算される。

X	x_1	x_2	$\cdots\cdots$	x_n	計
p	p_1	p_2	$\cdots\cdots$	p_n	1

$$\boldsymbol{E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots\cdots + x_np_n}$$

問題 1 上の例 1，例 2 について，$E(X)$，$E(Y)$ をそれぞれ求めよ。
また，X^2，$2Y-10$ の平均はどうなるか。

● 分散 $V(X)$ ●

確率変数 X の確率分布が右の表で表されており，その平均が $E(X)=m$ であるとする。このとき，X の分散は次のように計算される。

X	x_1	x_2	$\cdots\cdots$	x_n	計
p	p_1	p_2	$\cdots\cdots$	p_n	1

$$\boldsymbol{V(X) = E\big((X-m)^2\big)}$$

分散の平方根を**標準偏差**という。つまり，X の標準偏差 $\sigma(X)$ は，$\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$

分散は，次の公式でも計算することができ，こちらのほうが簡単である。

$$\boxed{\boldsymbol{V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2}}$$

問題 2 上の例 1，例 2 について，$V(X)$，$V(Y)$，$\sigma(X)$，$\sigma(Y)$ をそれぞれ求めよ。

問題2 右の表はある小テストの点数 X(5 点満点) の確率分布を表している。

(1) この小テストの平均を求めよ。
(2) この小テストの標準偏差を求めよ。

X	0	1	2	3	4	5	計
p	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

問題3 男子 4 人，女子 5 人の中から，2 人の委員を選ぶとき，選ばれた女子の人数を X とする。

(1) X の確率分布を求めよ。
(2) X の平均と分散を求めよ。

問題4 さいころを 4 回投げ，2 の目が出た回数を X とする。

(1) X の確率分布を求めよ。
(2) X の平均と分散を求めよ。

問題 4 は，反復試行の確率に関する分布となり，このような分布を**二項分布**と呼んでいる。

X	0	1	2	3	4	計
p	${}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{5}{6}\right)^4$	${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^3$	${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2$	${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1$	${}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{6}\right)^4$	1

投げる回数が 4 回，注目している事象が起こる確率が $\frac{1}{6}$ なので，この二項分布を記号で $\boldsymbol{B\left(4,\ \frac{1}{6}\right)}$ と表す。

二項分布であることが分かれば，平均と分散は次の式により，表を書かずに簡単に計算ができる。

● 二項分布の平均と分散 ●

$B(n,\ p)$ について，

平均は $\boldsymbol{np}$，分散は $\boldsymbol{np(1-p)}$