3　合成関数の微分法

合成関数とは，ある関数 $f(x)$ の「中に」別の関数 $g(x)$ が入り込んだものでした。
例えば $f(x)=x^2+1$ という関数の中に $g(x)=x-3$ が入り込むと

$$f(g(x))=f(x-3)=(x-3)^2+1$$

という合成関数が出来上がります。

例　題

次の関数は，どんな関数の合成関数と考えられるか。

(1) $y=\sqrt{2x+3}$
　… $\sqrt{\quad}$ の中に $2x+3$ が入っている。
　　つまり，$y=\sqrt{x}$ と $y=2x+3$ の合成関数。

(2) $y=\sin(3x+2)$
　… $\sin(\quad)$ の中に $3x+2$ が入っている。
　　つまり，$y=\sin x$ と $y=3x+2$ の合成関数。

(3) $y=\tan^2 x$
　… 少し分かりづらいが，$y=(\tan x)^2$ と意味は同じ。
　　$(\quad)^2$ の中に $\tan x$ が入っている。つまり，
　　$y=x^2$ と $y=\tan x$ の合成関数。

合成関数は，外側の箱である関数 $f(x)$ と，中に閉じ込められた関数である関数 $g(x)$ で作られています。合成関数の式を見て，外側の箱が何で，閉じ込められているのが何かをしっかり見分けられるようになっておきましょう。

合成関数の微分

合成関数 $y=f(g(x))$ を微分してみましょう。$g(x)=u$ とおきます。
x の増分が Δx，このときの u の増分が Δu，それによる y の増分が Δy であるとします。
$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ という式が成り立つわけですが，ここで $\Delta x\to 0$ とすると，それにともなって $\Delta u\to 0$ となりますから，

左辺の極限 … $\dfrac{dy}{dx}$，　右辺の極限 … $\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$

ということで，次の式が成り立つことになります。

◇合成関数の微分法①◇

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

別の言い方をすると，次のようにもかけます。

◇合成関数の微分法②◇

$$\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$$

外側の箱が $f(x)$，閉じ込められている中身が $g(x)$ だとすると，この合成関数 $f(g(x))$ の微分は

$$f'(\quad)\times g(x) \cdots (箱の微分)\times(中身の微分)$$

という風に計算されるわけです。

同じ問題を，2 通りの方法で解いてみましょう。

例　題

次の関数を微分せよ。

(1) $y=(2x+1)^5$ 　…【x^5 と $2x+1$ の合成関数】

(解 1) $2x+1=u$ とおくと，$y=u^5$。これを x で微分すると

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=5u^4\cdot 2=10(2x+1)^4$$

(解 2) $y=(2x+1)^5$ を x で微分すると

$$\begin{aligned} y' &= 5(2x+1)^4\cdot(2x+1)' \quad \cdots\ (\text{箱の微分})\times(\text{中身の微分}) \\ &= 10(2x+1)^4 \end{aligned}$$

(2) $y=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3$ 　…【x^3 と $x+\dfrac{1}{x}$ の合成関数】

(解 1) $x+\dfrac{1}{x}=u$ とおくと，$y=u^3$。これを x で微分すると

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=3u^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=3\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$

(解 2) $y=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3$ を x で微分すると

$$\begin{aligned} y' &= 3\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)' \quad \cdots\ (\text{箱の微分})\times(\text{中身の微分}) \\ &= 3\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

繰り返しになりますが，確認をしておきましょう。上の例題の (1) を分析したものです。

$$y=u^5 \qquad \cdots\cdots\ y=(2x+1)^5$$

この中に $2x+1$ が入っている

$$y'=\underbrace{(u^5)'}_{\text{箱の微分}}\cdot\underbrace{(2x+1)'}_{\text{中身の微分}}$$

合成関数を見かけたら，必ず上のように，外側の箱と，中身に「色分け」して考えましょう。箱は箱，中身は中身でそれぞれ微分し，それらを掛けるのです。

合成関数の微分法は，この先ずっと使い続けます。しっかり練習をしておく必要があります。