４　逆関数の微分法

$y=\sqrt{x}$ という関数を覚えていますか？　無理関数といいましたね。これらの微分はどのようにすればよいのか考えましょう。

$y=\sqrt{x}$ の両辺を２乗すると，

$$y^2 = x \quad \cdots ①$$

となります。

①の左辺は「y^2」となっていますが，これ，実は x についての合成関数だということが分かりますか？　$(\quad)^2$ の中に，y が入っていると考えられますね。今この問題では $y=\sqrt{x}$ ですから，

y^2は$(\quad)^2$の中に「$\sqrt{x}$」が入った合成関数

ということになります。

では，①の両辺を x で微分したいと思います。左辺には合成関数の微分法を用いて，

$$(\text{左辺の微分}) = \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dy}y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 2y \cdot \frac{dy}{dx}$$

①の右辺を x で微分すると１ですから，結局

$$2y \cdot \frac{dy}{dx} = 1$$

よって，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2y} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ と求まりました。

今の流れを，もう少しすっきりとまとめてみたいと思います。①の式は

$$x = y^2 \quad \cdots ②$$

とかけるわけですが，普段見慣れた２次関数「$y=x^2$」という式と，x，y の位置が逆になっています。

いつもなら「y を x で微分する」といいますが，何しろ②の式は x，y が逆なので，「x を y で微分する」という言い方が自然でしょうね。そこで②において，x を y で微分すると

$$\frac{dx}{dy} = 2y$$

両辺の”逆数”をとって，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2y} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

x，y が逆になった式で $\dfrac{dx}{dy}$ を計算し，その”逆数”をとって $\dfrac{dy}{dx}$ を求めることができますよ，ということが分かったわけです。

◇逆関数の微分法◇

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$

例　題

次の関数を微分せよ。

(1) $y=\sqrt[4]{x}$

両辺を 4 乗すると $y^4=x$，つまり $x=y^4$

x を y で微分して，$\dfrac{dx}{dy}=4y^3$

よって，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{4y^3}=\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

(2) $y=\sqrt{3x-2}$

両辺を 2 乗すると $y^2=3x-2$，つまり $x=\dfrac{1}{3}y^2+\dfrac{2}{3}$

両辺を y で微分して，$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{2}{3}y$

よって，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{\dfrac{2}{3}y}=\dfrac{3}{2y}=\dfrac{3}{2\sqrt{3x-2}}$

このように，無理関数を微分するためには逆関数の微分法が必要なわけですが，簡単にするために便利な公式を作っておきましょう。

これは，今までよく知っていた公式の拡張でもあります。

◇ x^r の導関数 ◇

r が有理数のとき　$(x^r)'=rx^{r-1}$

簡単に説明しましょう。以下 m は整数，n は自然数とします。

まず，$y=x^{\frac{1}{n}}$ を微分するために両辺を n 乗して，$x=y^n$

逆関数の微分法より，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{ny^{n-1}}=\dfrac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}}=\dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$

次に，$y=x^{\frac{m}{n}}$ を微分しますが，この式は $y=(x^{\frac{1}{n}})^m$ と書き直せます。$(\quad)^m$ の中に $x^{\frac{1}{n}}$ が入った合成関数です。

合成関数の微分法より，

$$\{(x^{\frac{1}{n}})^m\}'=m(x^{\frac{1}{n}})^{m-1}\cdot(x^{\frac{1}{n}})'=mx^{\frac{m}{n}-\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$$

$r=\dfrac{m}{n}$ とおくと，r は有理数であり，$(x^r)'=rx^{r-1}$ が成り立ったことになります。

例　題

次の関数を微分せよ。

(1) $y=\sqrt[3]{x^2}$

$y=x^{\frac{2}{3}}$ と変形できるから，$y'=\dfrac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

(2) $y=\sqrt{3x-2}$

$y=\sqrt{3x-2}=(3x-2)^{\frac{1}{2}}$ を微分すると，

$y'=\dfrac{1}{2}(3x-2)^{1-\frac{1}{2}}\cdot(3x-2)'=\dfrac{3}{2\sqrt{3x-2}}$