6　対数関数の導関数

特殊な関数の微分法，2 番目に登場するのは対数関数です。

底を a とする対数関数，$y=\log_a x$ を微分することを考えましょう。導関数の定義より，

$$\begin{aligned}(\log_a x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\{\log_a(x+h)-\log_a x\}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\log_a\frac{x+h}{x} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right) \cdots ①\end{aligned}$$

あとは，h を限りなく 0 に近づけてみればよいわけですが，①の式をよく見てください。

$$\frac{1}{h}\to\infty, \qquad \log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)\to\log_a 1 = 0$$

となることから，①は $\infty\times 0$ という形の不定形になってしまいます。そこで，もう少しがんばって変形を続けていきましょう。

$\dfrac{h}{x}=t$ という置き換えをします。$h\to 0$ のとき，$t\to 0$ となるので，

$$① = \lim_{t\to 0}\frac{1}{xt}\log_a(1+t)$$

記号 lim がターゲットとしている文字は t ですから，無関係な x は lim の前に出すことができ，

$$(与式) = \frac{1}{x}\lim_{t\to 0}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} \cdots ②$$

と，何とかここまで変形できました。

ところが，実は人間の手でできる計算はここまでなのです。このあといくら変形を繰り返しても，最後に出てきた $(1+t)^{\frac{1}{t}}$ の極限が，$t\to 0$ のときどうなるのかを求めることはできません。

そこで，コンピュータの出番です。$(1+t)^{\frac{1}{t}}$ という式は，

$t=1$ のとき，$(1+1)^{\frac{1}{1}} = 2^1 = \mathbf{2}$
$t=0.5$ のとき，$(1+0.5)^{\frac{1}{0.5}} = 1.5^2 = \mathbf{2.25}$
$t=0.1$ のとき，$(1+0.1)^{\frac{1}{0.1}} = 1.1^{10} = \mathbf{2.5937424601}$
$t=0.01$ のとき，$(1+0.01)^{\frac{1}{0.01}} = 1.01^{100} = \mathbf{2.7048132894\cdots}$
$t=0.001$ のとき，$(1+0.001)^{\frac{1}{0.001}} = 1.001^{1000} = \mathbf{2.7169239322\cdots}$

のように，t の値が小さくなるほど「2.7」付近の数値に近づいていくことが分かります。
実際，$t\to 0$ のとき，$(1+t)^{\frac{1}{t}}$ は

$$\mathbf{2.71828182845904523536028747}\cdots$$

という値に収束することが知られています。この値は無理数です。小数でかくと見づらいので，記号で $\boldsymbol{e}$ とかくことにすると，

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = 2.718281828459045\cdots = \boldsymbol{e}$$

ということになります。この定数は**ネイピア定数**と呼ばれています。

では，話を元に戻します。②より，

$$(\log_a x) = \frac{1}{x}\lim_{t\to 0}\log_a (1+t)^{\frac{1}{t}} = \frac{1}{x}\log_a e$$

底を a から e に変換して，$\boldsymbol{(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\log_e a}}$

多少無理をしましたが，$e = 2.718281828459045\cdots$ という定数を用いて，何とか対数関数を微分することができました。

◇ 対数関数の導関数 (元祖) ◇

$$\boldsymbol{(\log_a x)' = \frac{1}{x\log_e a}}$$

ただし，$\boldsymbol{e = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}} = 2.718281828459045\cdots$

さて，無理やり考えたようにも思える定数 e ですが，この定数を利用しなければ対数を微分することはできません。それどころか，今後出てくる指数関数も微分できなくなります。指数，対数関数の微分にとって，この定数 e は必要不可欠な定数なのです。

e を底とする対数を**自然対数**といいます。微分法の章ではこれから頻繁に登場しますので，自然対数 $\log_e x$ については，底 e を省略して，単に $\boldsymbol{\log x}$ と書くことが多いです。

つまり，$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\log a}$ のように書くことになります。特に，自然対数の導関数については

$$(\log x)' = \frac{1}{x\log e} = \frac{1}{x\cdot\log_e e} = \frac{1}{x\cdot 1} = \frac{1}{x}$$

となりますから，表記がだいぶすっきりします。

では，改めて対数関数の導関数についてまとめておきましょう。

◇ 対数関数の導関数 ◇

$$\boldsymbol{(\log_a x)' = \frac{1}{x\log a},\qquad (\log x)' = \frac{1}{x}}$$

※ $\log x$ は対数関数，$\dfrac{1}{x}$ は分数関数 (反比例のグラフ) です。この，一見何の関係もないように見える 2 種類の関数は，微分という操作によって結びついています。

例　題

次の関数を微分せよ。

(1) $y = \log_3 x$

$y' = \dfrac{1}{x\log 3}$

※「$\log 3$」は「$\log_e 3$」を省略したもの。つまり定数。

(2) $y = \log(5x-1)$

$\log(\quad)$ と $5x-1$ の合成関数であるから，

$y' = \dfrac{1}{5x-1}\cdot(5x-1)' = \dfrac{5}{5x-1}$

(3) $y = (\log x)^3$

$(\quad)^3$ と $\log x$ の合成関数であるから，

$y' = 3(\log x)^2\cdot(\log x)' = \dfrac{3(\log x)^2}{x}$