応用問題に挑戦

数Ⅱ　関数の最大・最小 (解答)

■1　$f(x) = ax(x-6)^2 + b$ より，
$f'(x) = 3ax^2 - 24ax + 36a = 3a(x-2)(x-6)$
$a > 0$ なので，$1 \leqq x \leqq 5$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$25a+b$	$\nearrow$	$32a+b$	$\searrow$	$5a+b$

最大値は $x=2$ のとき $32a+b$，最小値は表から $25a+b$ か $5a+b$ のどちらかであるが，$a>0$ であることから $25a+b > 5a+b$ であるといえるので，最小値は $x=5$ のとき $5a+b$ である。
よって，$32a+b=25$，$5a+b=-2$ を解いて，$a=1$，$b=-7$

■2　$f(x) = -x^3 + 6ax^2 - 9a^2x$ より，$f'(x) = -3x^2 + 12ax - 9a^2 = -3(x-a)(x-3a)$
$a \geqq \dfrac{2}{3}$ なので，$x=a$ は区間 $0 \leqq x \leqq 2$ に入る可能性がある。しかし，$3a \geqq 2$ であるから，$x=3a$ は区間の中に入らない。

(ⅰ) $\dfrac{2}{3} \leqq a < 2$ のとき，増減表は右の通り。
最小値は $x=a$ のとき，$-4a^3$

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-4a^3$	$\nearrow$	$-18a^2+24a-8$

(ⅱ) $2 \leqq a$ のとき，増減表は右の通り。
最小値は $x=2$ のとき，$-18a^2+24a-8$

x	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-18a^2+24a-8$

NANCHINA