応用問題に挑戦

数II 方程式・不等式への応用(解答)

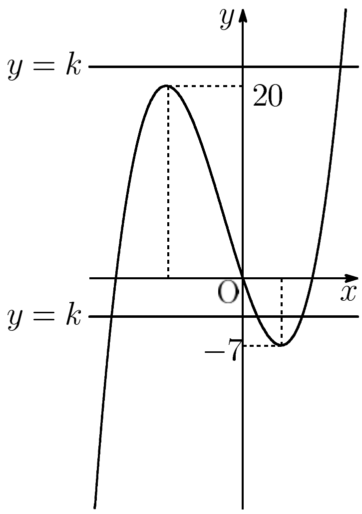
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	20	$\searrow$	-7	$\nearrow$

■ 1 (1) $2x^3+3x^2-12x=k$ の実数解について考える。これは,

連立方程式 $\begin{cases} y=2x^3+3x^2-12x & \text{①} \\ y=k & \text{②} \end{cases}$ の実数解と同じで

あるから,①,②の 2 つのグラフの共有点の個数を考えればよい。

①について,$y'=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$ より,増減表,グラフは右のようになる。



①,②の共有点が 1 個しかない範囲をグラフから読み取ると,求める範囲は $k<-7$,$20<k$

(2) 1 つの負の解と 2 つの異なる正の解をもつのは,①,②のグラフが y 軸よりも左で 1 つ,右で 2 つの共有点をもつ場合であるから,グラフから読み取ると,$-7<k<0$

■ 2 $x^3-6(x^2-k) \geqq 0$ が成り立つように,k の値を定めればよい。$f(x)=x^3-6(x^2-k)$ とおくと,

$f'(x)=3x^2-12x=3(x+2)(x-2)$ より,$x \geqq 0$ における増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$6k$	$\searrow$	$6k-16$	$\nearrow$

増減表より,$x \geqq 0$ における $f(x)$ の最小値は $6k-16$ と表されるので,$f(x) \geqq 6k-16$

$f(x) \geqq 0$ となるためには,$6k-16 \geqq 0$ であればよい。よって,$k \geqq \dfrac{8}{3}$

※ (別解) はじめの不等式を $k \geqq -\dfrac{1}{6}x^3+x^2$ と変形し,2 つのグラフ

$$y=k \quad \text{①}, \qquad y=-\frac{1}{6}x^3+x^2 \quad \text{②}$$

を考える。①が②よりも上方にあればよいことから,グラフをかいて読み取ってもよい。