応用問題に挑戦

数Ⅱ 定積分と微分法

■1 $\int_a^x f(t)\,dt = x^3 - 2x^2 + 1$ を満たす関数 $f(x)$ と，定数 a の値をそれぞれ求めなさい。

両辺を x で微分すると　$f(x) = 3x^2 - 4x$

また、$x = a$ とすると

$$\int_a^a f(t)dt = a^3 - 2a^2 + 1$$

$$0 = (a-1)(a^2 - a - 1)$$

$$\therefore\ a = 1,\ \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

1	1	−2	0	1
		1	−1	−1
	1	−1	−1	0

■2 $f(x) = 2x - 3\int_0^1 f(t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めなさい。

$a = \int_0^1 f(t)dt$ …① とおくと、$f(x) = 2x - 3a$

$\therefore$ $f(t) = 2t - 3a$ より、①に戻すと

$$a = \int_0^1 (2t - 3a)dt = \left[t^2 - 3at\right]_0^1 = 1 - 3a$$

$4a = 1$　$\therefore$ $a = \frac{1}{4}$　　よって $f(x) = 2x - \frac{3}{4}$

■3 $F(x) = \int_1^x (t^2 - 3t + 2)\,dt$ の増減，極値を調べなさい。

$$F'(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

$$F(1) = \int_1^1 (t^2 - 3t + 2)dt = 0$$

$$F(2) = \int_1^2 (t^2 - 3t + 2)dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2t\right]_1^2$$

$$= \frac{8}{3} - 6 + 4 - \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2\right) = -\frac{1}{6}$$

x	…	1	…	2	…
$F'(x)$	+	0	−	0	+
$F(x)$	↗	0	↘	$-\frac{1}{6}$	↗

増減は表のようになり、

極大値 0 $(x = 1)$，極小値 $-\frac{1}{6}$ $(x = 2)$

NANCHINA