基本問題を確認しよう

数A　三角形の性質

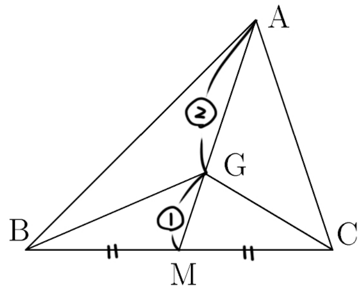
三角形の重心，外心，内心の基本定理
【重心】三角形の３本の中線は１点で交わり，その点はそれぞれの中点を $2:1$ に内分する。
【外心】三角形の３本の垂直二等分線は１点で交わり，その点は３つの頂点から等距離にある。
【内心】三角形の３本の内角の二等分線は１点で交わり，その点は３辺から等距離にある。

角の二等分線と辺の比　$\triangle$ABC において，$\angle$A の二等分線と辺 BC の交点を P とすると，
$\mathrm{BP}:\mathrm{PC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}$

辺と角の大小関係　$\triangle$ABC において，$\mathrm{AB}>\mathrm{AC} \iff \angle\mathrm{B}<\angle\mathrm{C}$

三角形の成立条件　三角形の２辺の和は，残りの辺より大きい。

1　図の点 G は $\triangle$ABC の重心である。$\triangle$ABC の面積が 12 であるとき，次の三角形の面積を求めなさい。



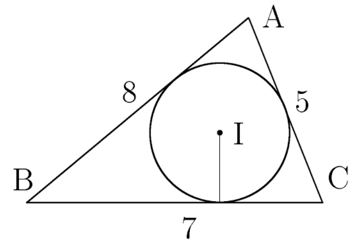
(1) $\triangle$GAC

$$\triangle \mathrm{GAC} = \frac{2}{3}\triangle \mathrm{AMC} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\triangle \mathrm{ABC} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 12 = 4$$

(2) $\triangle$GBM

$$\triangle \mathrm{GBM} = \frac{1}{3}\triangle \mathrm{ABM} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 12 = 2$$

2　右の図で，内接円の半径を求めなさい。



まず$\triangle$ABCの面積を求める。 $\cos A = \dfrac{8^2+5^2-7^2}{2\cdot 8\cdot 5} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \sin A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より、$\triangle \mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 5\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$

ヘロンの公式も利用可

内接円の半径を r とすると

$10\sqrt{3} = \dfrac{1}{2}(8+5+7)r$

$10\sqrt{3} = 10r \quad \therefore\ r=\sqrt{3}$

3　3 辺の長さが x，$x-1$，6 であるような三角形を作るためには，x がどのような範囲にあればよいか。

最大辺は x または 6。成立条件より、

$$\begin{cases} x<(x-1)+6 & \cdots \text{常に成立} \\ 6<x+(x-1) & \cdots\ x>\dfrac{7}{2} \end{cases} \qquad \therefore\ x>\frac{7}{2}$$