応用問題に挑戦

数Ⅱ　2次方程式の解と係数の関係(解答)

■1　2つの解をα，βとすると，解と係数の関係より$\alpha+\beta=-p$，$\alpha\beta=24$

解の差が5であるから，$|\alpha-\beta|=5$

両辺を2乗して，$(\alpha-\beta)^2=25$

$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=25$

$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-4\alpha\beta=25$

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=25$

よって，$(-p)^2-4\cdot 24=25$

$p^2=121\quad \therefore p=\pm 11$

■2　2つの解をα，βとすると，解と係数の関係より$\alpha+\beta=5$，$\alpha\beta=3$

(1) $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\beta\alpha}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{5^2-2\cdot 3}{3}=\dfrac{19}{3}$

(2) $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta=5^2-3=22$

(3) $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=5^2-4\cdot 3=13$

■3　2次方程式$x^2+ax+2a-3=0$の2つの解をα，βとすると，解と係数の関係より$\alpha+\beta=-a$，$\alpha\beta=2a-3$

(1) 異なる2つの負の解をもつには，(ア) 2つの実数解が存在する　(イ) $\alpha<0$ かつ $\beta<0$ の2つの条件が成り立てばよい。

(ア) について，判別式$D=a^2-4(2a-3)>0$ となればよいから，

$a^2-8a+12>0$

$(a-2)(a-6)>0\qquad \therefore a<2,\ 6<a\cdots$①

(イ) について，$\alpha+\beta<0$ かつ $\alpha\beta>0$ であればよいから，

$-a<0$ かつ $2a-3>0\quad \therefore a>\dfrac{3}{2}\cdots$②

①②より，$\dfrac{3}{2}<a<2,\ 6<a$

(2) 異符号の解をもつには，(ア) 2つの実数解が存在する　(イ) $\alpha\beta<0$ の2つの条件が成り立てばよい。

(ア) より，$\therefore a<2,\ 6<a\cdots$①

(イ) より，$2a-3<0\quad \therefore a<\dfrac{3}{2}\cdots$②

①②より，$a<\dfrac{3}{2}$

(3) 1より大きい2つの負の解をもつには，(ア) 2つの実数解が存在する　(イ) $\alpha>-5$ かつ $\beta>-5$ つまり $\alpha+5>0$ かつ $\beta+5>0$ の2つの条件が成り立てばよい。

(ア) より，$\therefore a<2,\ 6<a\cdots$①

(イ) について，$(\alpha+5)+(\beta+5)>0$ かつ $(\alpha+5)(\beta+5)>0$ であればよいから，

$\alpha+\beta+10>0$ かつ $\alpha\beta+5(\alpha+\beta)+25>0$

$-a+10>0$ かつ $2a-3+5(-a)+25>0\qquad \therefore a<\dfrac{22}{3}\cdots$②

①②より，$6<a<\dfrac{22}{3}$

NANCHINA