応用問題に挑戦

数Ⅰ　余弦定理(解答)

■1　余弦定理より，$a^2 = 2^2 + (1+\sqrt{3})^2 - 2\cdot 2\cdot(1+\sqrt{3})\cos 60^\circ = 6$

$a > 0$ より，$a = \sqrt{6}$

B について余弦定理より，$\cos B = \dfrac{(\sqrt{6})^2 + (1+\sqrt{3})^2 - 2^2}{2\sqrt{6}(1+\sqrt{3})} = \dfrac{2\sqrt{3}+6}{2\sqrt{6}(1+\sqrt{3})} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ < B < 180^\circ$ だから，$B = 45^\circ$

よって $C = 180^\circ - A - B = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ$

※ C について余弦定理を使うと，計算が難しくなる。

※ 別解として，頂点 C から辺 AB に垂線を下ろす方法もある。これだと，中学校の内容だけで解くことができる。

■2　(1) B について余弦定理より，$\cos B = \dfrac{5^2 + 9^2 - 8^2}{2\cdot 5\cdot 9} = \dfrac{7}{15}$

(2) △ABD において，BD = 6 だから，B に対して余弦定理より

$\mathrm{AD}^2 = 6^2 + 5^2 - 2\cdot 6\cdot 5\cos B = 36 + 25 - 60\cdot\dfrac{7}{15} = 33$

$\mathrm{AD} > 0$ より $\mathrm{AD} = \sqrt{33}$

■3　$\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,　$\cos B = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$,　$\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

であるから，与えられた等式に代入して

$$a\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + b\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} = c\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

両辺に $2abc$ をかけて，$a^2(b^2+c^2-a^2) + b^2(c^2+a^2-b^2) = c^2(a^2+b^2-c^2)$

$c^4 - a^4 + 2a^2b^2 - b^4 = 0$　　$c^4 - (a^2-b^2)^2 = 0$

$(c^2+a^2-b^2)(c^2-a^2+b^2) = 0$

よって，$b^2 = c^2 + a^2$　または　$a^2 = b^2 + c^2$

すなわち，△ABC は，B または A が直角である直角三角形。