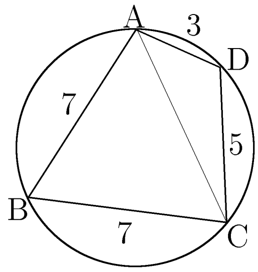
応用問題に挑戦

数Ⅰ　図形の計量(解答)



■1 (1) $\mathrm{AC}=x$ とおくと，$\triangle\,\mathrm{BAC}$，$\triangle\,\mathrm{DAC}$ のそれぞれで余弦定理より，

$x^2=7^2+7^2-2\cdot 7\cdot 7\cos B$　…①

$x^2=3^2+5^2-2\cdot 3\cdot 5\cos D$　…②

円に内接する四角形の性質より，$D=180^\circ-B$ だから，②は

$x^2=3^2+5^2-2\cdot 3\cdot 5\cos(180^\circ-B)$

つまり，$x^2=34+30\cos B$　…③

①③から，$98-98\cos B=34+30\cos B$

$-128\cos B=-64$　　$\therefore \cos B=\dfrac{1}{2}$

これを③に戻して，$x^2=34+15=49$　　$x>0$ より, $x=\mathrm{AC}=7$

(2) (1) から $\cos B=\dfrac{1}{2}$ なので,

$\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin D=\sin(180^\circ-B)=\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって四角形 ABCD の面積は,

$$S=\triangle\,\mathrm{BAC}+\triangle\,\mathrm{DAC}=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 7\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{49\sqrt{3}}{4}+\frac{15\sqrt{3}}{4}=16\sqrt{3}$$

■2 (1) $\triangle\,\mathrm{BPC}$ において，余弦定理より

$\mathrm{PC}^2=3^2+2^2-2\cdot 3\cdot 2\cos 60^\circ=7$

$\mathrm{PC}>0$ だから，$\mathrm{PC}=\sqrt{7}$

(2) $\triangle\,\mathrm{PCD}$ は二等辺三角形であり，3 辺の長さは $\sqrt{7}$，$\sqrt{7}$，3 である。

頂点 P から底辺 CD へ垂線を下ろし，その足を H とすると，$\mathrm{CH}=\dfrac{3}{2}$ であるから，

$\triangle\,\mathrm{PCH}$ で三平方の定理より，

$\mathrm{PH}^2=(\sqrt{7})^2-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{19}{4}$

$\mathrm{PH}>0$ より，$\mathrm{PH}=\dfrac{\sqrt{19}}{2}$

よって $\triangle\,\mathrm{PCD}$ の面積は，$S=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot\dfrac{\sqrt{19}}{2}=\dfrac{3\sqrt{19}}{4}$