応用問題に挑戦

数Ⅱ　三角関数の加法定理

■1　α が第1象限の角，β が第2象限の角で，$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\sin\beta=\dfrac{5}{13}$ のとき，$\sin(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha-\beta)$ の値を求めなさい。

$\sin\alpha>0$ より，$\sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$

$\cos\beta<0$ より　$\cos\beta=-\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=-\sqrt{\frac{144}{169}}=-\frac{12}{13}$

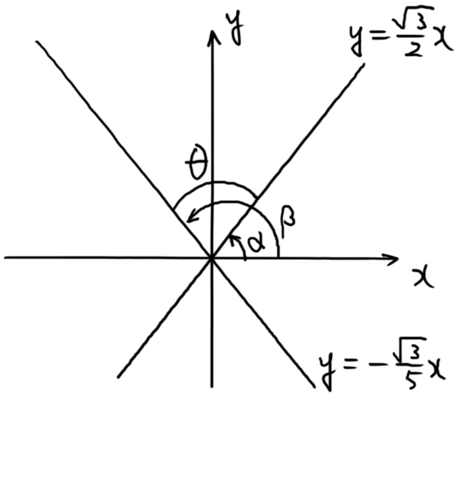
$$\therefore\ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$=\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)+\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}=\frac{-36+20}{65}=-\frac{16}{65}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)+\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}=\frac{-48+15}{65}=-\frac{33}{65}$$

■2　2直線 $\sqrt{3}x-2y+1=0$，$\sqrt{3}x+5y-1=0$ のなす角 θ を求めなさい。

それぞれの直線の傾きは $\frac{\sqrt{3}}{2}$ と $-\frac{\sqrt{3}}{5}$ であり，
2直線 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x$ と $y=-\frac{\sqrt{3}}{5}x$ とのなす角も θ となる。

右図において，$\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\beta=-\frac{\sqrt{3}}{5}$



$\theta=\beta-\alpha$ であるから

$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$
$$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{5}\right)}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{5}\right)}$$
$$=\frac{\frac{7\sqrt{3}}{10}}{\frac{7}{10}}=\sqrt{3}\qquad\therefore\ \theta=60^\circ$$

よって　なす角は　60°