2　不定積分の計算

$x^{\alpha+1}$ を微分すると，$(\alpha+1)x^{\alpha}$ となりますね。記号で書くと，

$$(x^{\alpha+1})' = (\alpha+1)x^{\alpha} \qquad (\alpha \text{ は実数})$$

ということです。この式の両辺を $(\alpha+1)$ で割ると，

$$\left\{\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right\}' = x^{\alpha}$$

となりますから，微分して x^{α} になる関数 (不定積分) が $\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ であることが分かります。これより，次の公式が成立します。

◇ x^{α} の不定積分① ◇

$\alpha \neq -1$ のとき　$$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

この公式の「α」の部分は，実数なら何でも構いません。ただし，$\alpha=-1$ だけは困ります。公式の右辺の分母が 0 になってしまい，定義できなくなるからです。

では，$\alpha=-1$ のときはどうすればいいのでしょうか。ちなみにこのとき，$x^{\alpha}=\dfrac{1}{x}$ となりますが，微分して $\dfrac{1}{x}$ になる関数は知っているはずです。

$$(\log|x|)' = \frac{1}{x}$$

という公式が以前ありましたね。このことから $\dfrac{1}{x}$ の不定積分が $\log x$ であることが分かります。

◇ x^{α} の不定積分② ◇

$\alpha = -1$ のとき　$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

例　題

① $$\int \frac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\,dx = \frac{1}{-3+1}x^{-3+1} + C = -\frac{1}{2}x^{-2} = -\frac{1}{2x^2} + C$$

② $$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$$

指数関数については，次の公式がありました。

$(e^x)' = e^x$,　　$(a^x)' = a^x \log a$ (→つまり，両辺を $\log a$ で割って，$\left\{\dfrac{a^x}{\log a}\right\}' = a^x$)

このことから，次の公式が成り立ちます。

◇ 指数関数の不定積分 ◇

$$\int e^x\,dx = e^x + C, \qquad \int a^x\,dx = a^x \log a + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

最後に三角関数については，次の公式がありました。

$$(\cos x)' = -\sin x\ , \qquad (\sin x)' = \cos x, \qquad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

このことから，次の公式が成り立ちます。

◇三角関数の不定積分◇

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C \ (C\text{は積分定数})$$

数学IIで学習したように，積分については次の性質が成り立ちます。

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

$$\int \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int \{f(x)-g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$$

$\int$は分けてもいいし，定数を前に出してもよい，という性質ですね。$\sum$とそっくりの性質です。

例　題

$$\begin{aligned}&\int \frac{x^2+2x+3}{x^2}\,dx\\ &\quad = \int \left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)dx = \int 1\,dx + \int \frac{2}{x}\,dx + \int \frac{3}{x^2}\,dx\\ &\quad = \boldsymbol{x + 2\log|x| - \frac{3}{x} + C}\end{aligned}$$