3　置換積分法

微分と違って積分は，公式を覚えれば計算できるわけではありません。色々な工夫をしなければ計算できない積分が多くあります。

例えば $\displaystyle\int x(1-x)^5\,dx$ という積分を考えましょう。「$(1-x)^5$」の部分を展開すれば，積分の公式だけで計算できますが，なかなか大変な作業になりそうです。

そこで，次のような文字の置き換えによる積分を考えてみます。

$$\int x(1-x)^5\,dx$$

① $1-x=t$ とおく。

② このとき，$\boldsymbol{x=1-t}$ である。

③ また，$\dfrac{dx}{dt}=-1$ である。(” 分母を払うと”，$\boldsymbol{dx=-dt}$)

④ これより，

$$\begin{aligned}\int x(1-x)^5\,dx &= \int \boldsymbol{(1-t)}\{1-\boldsymbol{(1-t)}\}^5\,\boldsymbol{(-dt)}\\ &= -\int(1-t)t^5\,dt = -\int(t^5-t^6)\,dt = -\frac{1}{6}t^6+\frac{1}{7}t^7+C\\ &= -\frac{1}{42}t^6(7-6t)+C\end{aligned}$$

⑤ t を元に戻して，答えは $-\dfrac{1}{42}(1-x)^6(6x+1)+C$

このように，積分の式の一部を別の文字で置き換えることによって行う積分法のことを**置換積分法**といいます。置換積分法は上の例で示したように，

① ある部分の x の式を t などの文字で置き換える。

② ①より，$x=g(t)$ という形の式を作る。

③ ②の式の両辺を微分して，$\dfrac{dx}{dt}=g'(t)$ という式を立てる。

④ ②と③の式を使って，積分の式を書き換える。

⑤ 計算を済ませたら，文字を元に戻す。

という手順で行います。次のようにまとめておきましょう。

◇置換積分法①◇

$x=g(t)$ という置き換えをすると，

$$\int \boldsymbol{f(x)\,dx} = \int \boldsymbol{f(g(t))g'(t)\,dt}$$

手順の①にあるように，積分の式の一部分を t と置き換えることによって，一見，積分が出来そうにない式も積分できるようになるわけですが，

「**どの部分を t とおけばよいのか**」

については，練習を重ねて，コツをつかむ必要があります。大体の場合は,「複雑なかたまりを t とおく」と考えておけば大丈夫でしょう。

$\displaystyle\int x(2x+3)^4\,dx$ …… $t=2x+3$ とおく

$\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\,dx$ …… $t=x+1$ とおく

$\displaystyle\int \frac{x}{(2x+3)^2}\,dx$ …… $t=2x+3$ とおく

では次に，以下の 3 つの例を見てください。

$$\int \underline{x^2}(\underset{\sim\sim}{x^3+1})^4\,dx \qquad \int \underset{\sim\sim}{\sin^2 x}\,\underline{\cos x}\,dx \qquad \int (\underset{\sim\sim}{e^x+1})^2\underline{e^x}\,dx$$

〜〜部の式を微分すると，＿＿部の式が現れてくるのがお分かりでしょうか。

これらの式は，$\int f(\underset{\sim\sim}{g(x)})\underline{g'(x)}\,dx$ という形をしています。このような式では，$g(x)$，つまり〜〜部を t とおくことで，置換積分ができます。

◇置換積分法②◇

$t = g(x)$ という置き換えをすると，

$$\int \boldsymbol{f(g(x))g'(x)\,dx} = \int \boldsymbol{f(t)\,dt}$$

この方法で置換積分をする場合，先ほどの手順②が必要なくなります。例として上の 3 つのうちの 1 つを解いてみます。

$\int x^2(x^3+1)^4\,dx$

① $t = x^3 + 1$ とおく。　② ($x = \cdots$ の形に変形しなくてよい)

③ $\dfrac{dt}{dx} = 3x^2$ である。$\left(\text{つまり，} \boldsymbol{dx = \dfrac{dt}{3x^2}}\right)$

④ これより，

$$\int x^2(x^3+1)^4\,dx \left(= \int x^2 \cdot \boldsymbol{t^4} \cdot \boldsymbol{\frac{dt}{3x^2}}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\int t^4\,dt = \frac{1}{15}t^5 + C$$

⑤ t を元に戻して，答えは $\dfrac{1}{15}(x^3+1)^5 + C$

この応用になりますが，$\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$ という形の式では，$t = f(x)$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx} = f'(x)$ となりますので，置換積分をして，次の公式が得られます。

◇置換積分法③◇

$$\int \boldsymbol{\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + C}$$

例　題

(1) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x-3}\,dx = \int \frac{(x^2+x-3)'}{x^2+x-3}\,dx = \boldsymbol{\log|x^2+x-3| + C}$

(2) $\displaystyle\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int \frac{-(\cos x)'}{\cos x}\,dx = \boldsymbol{-\log|\cos x| + C}$