4　部分積分法

微分法の章で,「積の微分法」というのを学習しましたね。

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

ちょっと簡略化して，$(fg)' = f'g + g'f$ とかいてみます。少し変形して，

$$f'g = (fg)' - g'f$$

となりますが，この両辺を x で積分すると，

$$\begin{aligned}\int f'g\,dx &= \int \{(fg)' - g'f\}\,dx \\ &= \int (fg)'\,dx - \int g'f\,dx \\ &= fg - \int g'f\,dx \qquad (\leftarrow \textstyle\int \text{と}\ '\ \text{が打ち消しあって消えた})\end{aligned}$$

このことから，次の公式が得られます。この公式を利用して積分を行う方法を，**部分積分法**といいます。

◇部分積分法◇

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

部分積分をするときのコツは，

積分する式を，$f(x)g'(x)$ の形に書き換える。

ということです。

例えば　　$x\cos x$ という式は，$x(\sin x)'$

$(2x-1)x^4$ という式は，$(2x-1)\left(\dfrac{1}{5}x^5\right)'$

という書き換えをします。

このことを踏まえて，例題をやってみましょう。

例　題

(1)
$$\begin{aligned}\int x\cos x\,dx &= \int x(\sin x)'\,dx \qquad \cdots\cdots\ \textstyle\int fg'\,dx\ \text{の形に変形 (公式の左辺)} \\ &= x\sin x - \int (x)'\sin x\,dx \quad \cdots\cdots\ fg - \textstyle\int f'g\,dx\ \text{の形 (公式の右辺)} \\ &= x\sin x - \int \sin x\,dx \\ &= x\sin x + \cos x + C\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\int (2x-1)x^4\,dx &= \int (2x-1)\left(\frac{1}{5}x^5\right)'\,dx \\ &= (2x-1)\left(\frac{1}{5}x^5\right) - \int (2x-1)'\left(\frac{1}{5}x^5\right)dx \\ &= \frac{1}{5}x^5(2x-1) - \frac{2}{5}\int x^5\,dx \\ &= \frac{1}{5}x^5(2x-1) - \frac{1}{15}x^6 + C \\ &= \frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{5}x^5 + C\end{aligned}$$

部分積分を応用すると，対数関数の積分ができます。

例　題

$$\begin{aligned}\int \log x\,dx &= \int (\log x)\cdot 1\,dx = \int (\log x)(x)'\,dx \\ &= x\log x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx \\ &= x\log x - \int dx + C \\ &= x\log x - x + C\end{aligned}$$

部分積分を使うのは，次のどちらかの場合です。

① $\int$ の後ろが 2 つの関数の積になっていて，片方の関数は微分すると定数になる。

……$\int x\sin x\,dx$，$\int xe^x\,dx$，$\int (2x+1)\cos x\,dx$ など

② log の入った積分。

普通に積分できない場合は，まず部分積分できないか考えましょう。上の①，②の形であれば部分積分ができます。

それでもダメな場合は，置換積分をすることになります。