2　定積分の置換積分法

不定積分の章で，置換積分法というのを学習しました。$t = g(x)$ のように，文字の置き換えを行う方法でした。

定積分でもこの方法が使えますが，定積分には $a \leqq x \leqq b$ のような区間がありますので，文字を置き換えるとこの区間も変わります。

例　題

$$\int_0^1 x(1-x)^5\,dx$$

$1 - x = t$ とおくと，$x = 1 - t$，$\dfrac{dx}{dt} = -1$

積分区間について，x が 0 から 1 まで変化するとき t は 1 から 0 まで変化する。(右の表)

x	$0 \to 1$
t	$1 \to 0$

以上から，

$$\int_0^1 x(1-x)^5\,dx = \int_1^0 (1-t)t^5(-dt)$$

$$= \int_1^0 (t^6 - t^5)\,dt = \left[\frac{1}{7}t^7 - \frac{1}{6}t^6\right]_1^0 = \frac{1}{42}$$

基本的なやり方は不定積分と同じですが，上のように区間変更の作業が増えることになります。つまり定積分の置換積分法では，

① 本体の式の置き換え　…… $x(1-x)^5 \;\to\; (1-t)t^5$

② dx，dt の置き換え　…… $dx \;\to\; -\,dt$

③ 積分区間の置き換え　…… $\displaystyle\int_0^1 \;\to\; \int_1^0$

という 3 つの置き換えが必要になるわけです。

特殊な置換積分

例　題

$a > 0$ のとき，$\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ を求めよ。

(解) $x = a\sin\theta$ とおくと，$\dfrac{dx}{d\theta} = a\cos\theta$

x	$0 \to a$
θ	$0 \to \dfrac{\pi}{2}$

今，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で考えると $\cos\theta \geqq 0$ であるから，

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)} = \sqrt{a^2\cos^2\theta} = |a\cos\theta| = a\cos\theta$$

よって，

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos\theta \cdot (a\cos\theta d\theta) = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta$$

$$= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$

$$= a^2\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}$$

例　題

$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ を求めよ。

(解) $x=\tan\theta$ とおくと，$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

x	$0 \to 1$
θ	$0 \to \frac{\pi}{4}$

このとき，

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\cos^2\theta \quad \cdots \text{公式「} 1+\tan^2=\frac{1}{\cos^2\theta}\text{」より}$$

であるから

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\Big[\,\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

この 2 題について，まとめておきましょう。

◇ 特殊な置換積分 ◇

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \boldsymbol{x=a\sin\theta}\text{とおく}$$

$$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{a^2+x^2}\,dx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \boldsymbol{x=a\tan\theta}\text{とおく}$$

偶関数と奇関数

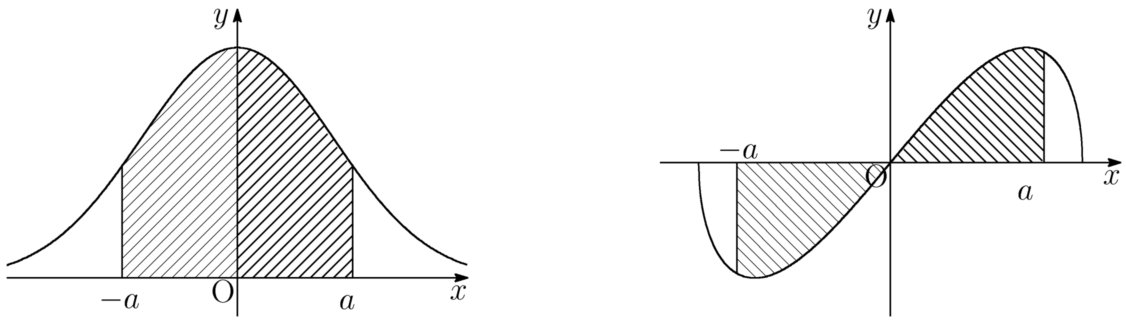
$f(x)=x^2$ や，$f(x)=\cos x$ のように，グラフが y 軸に関して対称な関数を**偶関数**といい，$f(x)=x^3$ や，$f(x)=\sin x$ のように，グラフが原点に関して対称な関数を**奇関数**といいます。

偶関数は，$\boldsymbol{f(-x)=f(x)}$ 　　奇関数は，$\boldsymbol{f(-x)=-f(x)}$

という性質を持っています。このことを利用すると，次の性質が説明できます。
(説明は略。$x=-t$ という置換積分を利用する。)

◇ 偶関数と奇関数の積分 ◇

1. $f(x)$ が偶関数のとき，$\displaystyle\boldsymbol{\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx}$
2. $f(x)$ が奇関数のとき，$\displaystyle\boldsymbol{\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0}$



上の図の左が偶関数，右が奇関数の様子です。この図と公式を見比べてみれば，公式の意味がよく分かるのではないでしょうか。