3　定積分の部分積分法

不定積分の章で，学習した部分積分の公式は次の通りです。

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

このことから，次のことが分かります。

◇ 定積分の部分積分法 ◇

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

例　題

(1) $\displaystyle\int_0^1 x(x-1)^4\,dx = \int_0^1 x\Big(\frac{1}{5}(x-1)^5\Big)'\,dx$

$$= \Big[x\cdot\frac{1}{5}(x-1)^5\Big]_0^1 - \int_0^1 (x)'\frac{1}{5}(x-1)^5\,dx$$

$$= 0 - \Big[\frac{1}{30}(x-1)^6\Big]_0^1 = \frac{1}{30}$$

(2) $\displaystyle\int_1^e \log x\,dx = \int_1^e (\log x)\cdot 1\,dx = \int_1^e (\log x)(x)'\,dx$

$$= \Big[x\log x\Big]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\cdot x\,dx$$

$$= e - \Big[\ x\ \Big]_1^e = 1$$

積分方程式への応用

例　題

次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x) = e^x - \int_0^1 tf(t)\,dt$$

(解) $a = \displaystyle\int_0^1 tf(t)\,dt$ とおくと，a は定数で，$f(x) = e^x - a$ であるから，

$$a = \int_0^1 tf(t)\,dt = \int_0^1 t(e^t - a)\,dt$$

$$= \int_0^1 te^t\,dt - a\int_0^1 t\,dt$$

$$= \int_0^1 t(e^t)'\,dt - a\int_0^1 t\,dt$$

$$= \Big[\ te^t\ \Big]_0^1 - \int_0^1 e^t\,dt \quad - a\Big[\frac{1}{2}t^2\Big]_0^1$$

$$= e - (e-1) - \frac{1}{2}a = 1 - \frac{1}{2}a$$

したがって，$a = 1 - \dfrac{1}{2}a$ より，$a = \dfrac{2}{3}$

よって，$f(x) = e^x - \dfrac{2}{3}$