4　定積分と微分

$f(t)$ の不定積分を $F(t)+C$ とすると，定積分の約束から

$$\int_a^x f(t)\,dx = F(x) - F(a)$$

右辺の $F(a)$ は定数項ですから，この式の両辺を x で微分すると $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = F'(x) - 0$ となり，次のことがいえます。

◇ 定積分と微分 ◇

a が定数のとき，$\displaystyle \boldsymbol{\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)}$

$$\frac{d}{dx}\cdot\int f(t)\,dt \quad\rightarrow\quad \boxed{}\,f(x)$$

$\dfrac{d}{dx}$(微分) と $\displaystyle\int$(積分) が打ち消しあって f が残る

というイメージで覚えておくとよいでしょう。

例　題

$F(x) = \displaystyle\int_0^x (x-t)\cos t\,dt$ について，$F'(x)$ を求めよ。

(解) $\displaystyle\int_0^x (x-t)\cos t\,dt = x\int_0^x \cos t\,dt - \int_0^x t\cos t\,dt$ だから，

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \underbrace{\frac{d}{dx}\left(x\int_0^x \cos t\,dt\right)'}_{} - \frac{d}{dx}\int_0^x t\cos t\,dt \qquad \cdots \text{積の微分法}\\
&= \underbrace{\int_0^x \cos t\,dt + x\cdot\frac{d}{dx}\int_0^x \cos t\,dt}_{} \quad - x\cos x\\
&= \Big[\sin t\Big]_0^x + x\cos x - x\cos x\\
&= \sin x
\end{aligned}$$

公式に合わない形の場合は，文字の置き換えなどの工夫が必要です。

例　題

$\displaystyle\int_0^{2x} f(t)\,dt$ を x で微分せよ。

(解) $2x = u$ とおくと，$\displaystyle\int_0^{2x} f(t)\,dt = \int_0^u f(t)\,dt$

これを x で微分すると，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_0^u f(t)\,dt &= \frac{du}{dx}\cdot\underbrace{\frac{d}{du}\int_0^u f(t)\,dt}_{} \qquad \cdots \text{公式の形に合わせた}\\
&= 2f(x)
\end{aligned}$$