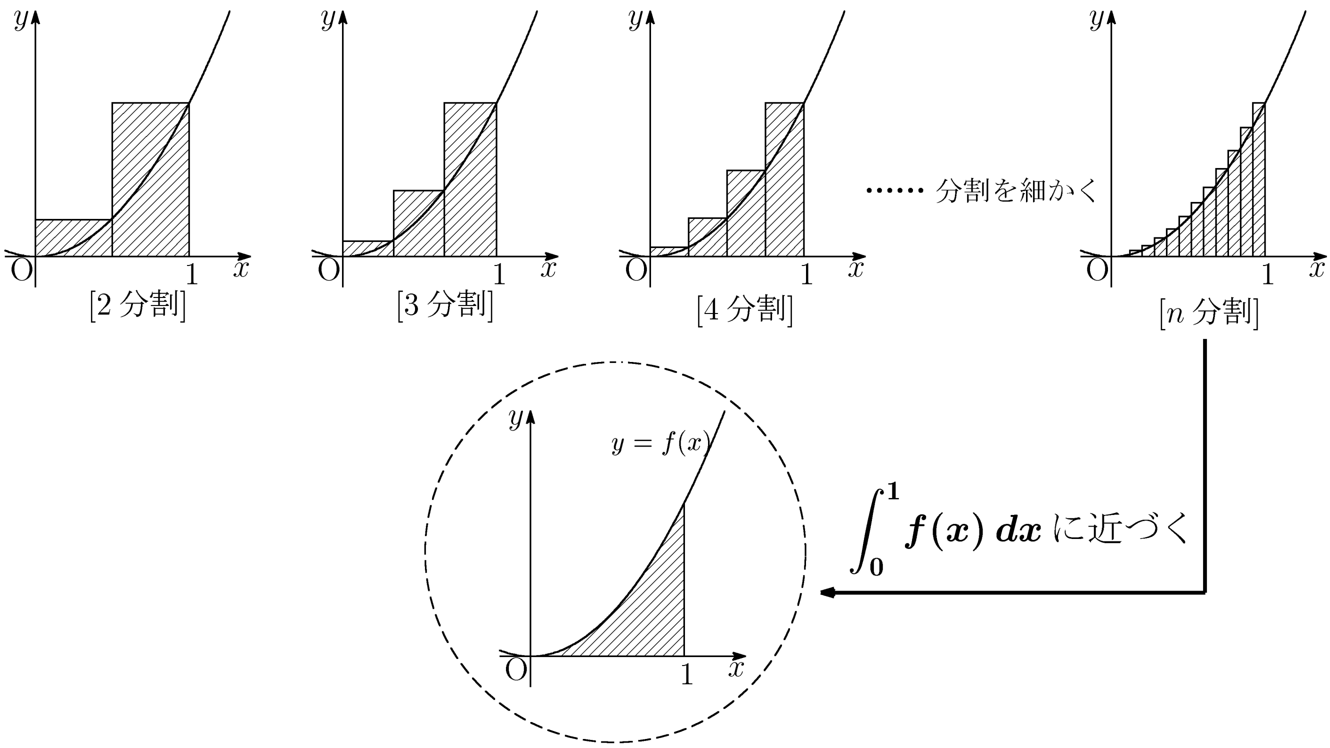
5　区分求積法

曲線 $y = f(x)$ と x 軸，および直線 $x = 1$ とで囲まれた部分を考えます。この部分の面積が定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ で計算できることはいいですね？

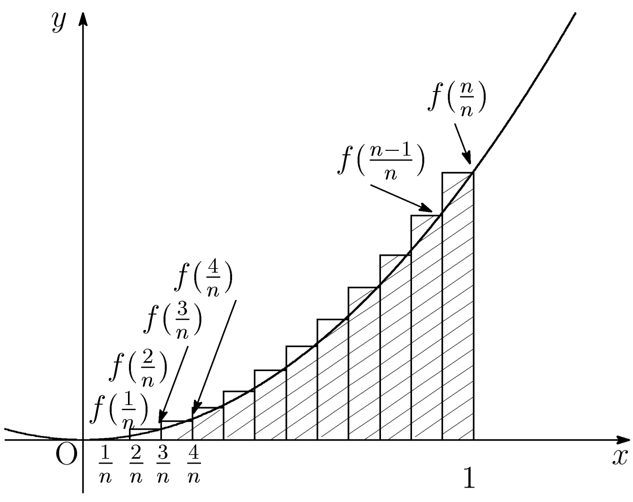


いま，区間 $0 \leqq x \leqq 1$ を，上の図のように長方形で分割していきます。長方形の右上の頂点がグラフ上に来るようにしてあります。

2 分割，3 分割と分割数を増やしていくうちに，長方形の面積の合計が，囲まれた部分の面積に近づいていくのが分かるでしょうか。

n 分割したときの，長方形の面積の合計を計算してみましょう。

まず，長さ 1 の区間を n 分割しますので，細長い長方形の横の長さは $\dfrac{1}{n}$ です。



また，長方形の高さは，$x = \dfrac{1}{n},\ \dfrac{2}{n},\ \dfrac{3}{n} \cdots\cdots \dfrac{n-1}{n},\ \dfrac{n}{n}$ のときの y 座標ですから，左から順に

$$f\left(\frac{1}{n}\right),\ f\left(\frac{2}{n}\right),\ f\left(\frac{3}{n}\right)\cdots\cdots,\ f\left(\frac{n-1}{n}\right),\ f\left(\frac{n}{n}\right)$$

このことから，n 分割したときの長方形の面積の合計は

$$\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \cdots\cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f\left(\frac{n}{n}\right)\right\} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

ここで，分割が細かければ細かいほど，この面積の合計は $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ の値に近づくんでした。分割を細かくする，ということは n を限りなく大きくすることですから，次の式が成り立ちます。

◇区分求積法◇

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+\cdots\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f\left(\frac{n}{n}\right)\right\}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

区分求積法は，数列の和の極限の計算に用いられることがあります。

例　題

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}\right)$ を求めよ。

(解) 数列の式の各項から $\dfrac{1}{n}$ をくくりだすと，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\boxed{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}+\boxed{\frac{1}{1+\frac{2}{n}}}+\cdots\cdots+\boxed{\frac{1}{1+\frac{n}{n}}}\right)$$

$f(x)=\boxed{\dfrac{1}{1+x}}$ とおくと，

$$(\text{与式}) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right\}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$
$$= \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \Big[\log|1+x|\Big]_0^1 = \log 2$$

式変形のコツは，

① 式から (強引に) $\dfrac{1}{n}$ をくくりだすこと

② 式の中に $\dfrac{1}{n}$，$\dfrac{2}{n}$，$\dfrac{3}{n}$，$\cdots\cdots$ と変化する部分を見つけて，そこを x とした関数を作ること。

の2つです。上の例題の他にも，例を挙げておきましょう。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\boxed{\sqrt{\frac{1}{n}}}+\boxed{\sqrt{\frac{2}{n}}}+\cdots\cdots+\boxed{\sqrt{\frac{n}{n}}}\right) \quad = \int_0^1 \boxed{\sqrt{x}}\,dx$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\cdots\cdots+\sin\pi\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\boxed{\sin\frac{1}{n}\pi}+\boxed{\sin\frac{2}{n}\pi}+\boxed{\sin\frac{3}{n}\pi}+\cdots\cdots+\boxed{\sin\frac{n}{n}\pi}\right) \quad = \int_0^1 \boxed{\sin\pi x}\,dx$$