6　定積分と不等式

区分求積法の発想から，次のことがいえます。

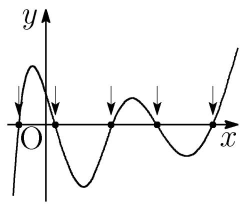
◇定積分の正値性◇

$a<b$ のとき，　　$\boldsymbol{f(x) \geqq 0}$ **ならば** $\displaystyle \boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx \geqq 0}$

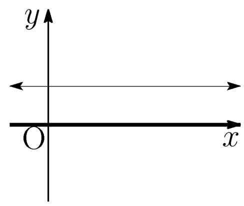
等号が成り立つのは，恒等的に $f(x)=0$ のとき。

「$f(x) \geqq 0$」というのは「関数 $y=f(x)$ のグラフが x 軸上か，それより上にある」ということであり，「恒等的に $f(x)=0$」というのは「$y=f(x)$ という関数のグラフが，直線 $y=0$ である」ということです。

つまり，グラフが x 軸にべたっと張り付いていたら $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は 0 になってしまいますが，そうではなく，グラフが x 軸より上にあるなら $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は正になる，といっているわけです。



[部分的に $f(x)=0$]



[恒等的に $f(x)=0$]

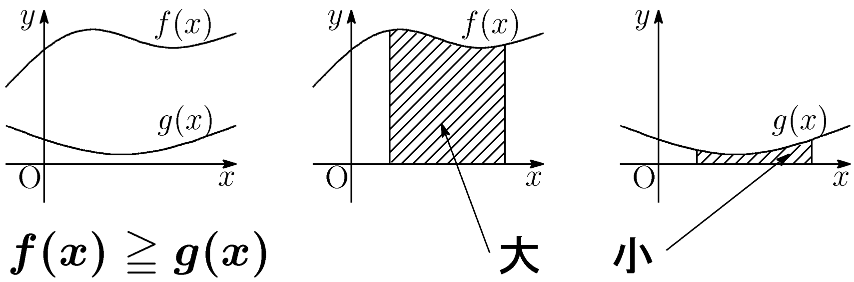
この性質を使うと，次のことが分かります。

◇定積分と不等式◇

$a<b$ のとき，　　$\boldsymbol{f(x) \geqq g(x)}$ **ならば** $\displaystyle \boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b g(x)\,dx}$

等号が成り立つのは，恒等的に $f(x)=g(x)$ のとき。

「上方にある関数を積分すると，下方にある関数を積分したときより大きくなる」ということです。「恒等的に $f(x)=g(x)$」とは「$f(x)$ と $g(x)$ が全く同じグラフ」であることを意味します。



これを利用して，いろいろな不等式の証明ができます。

例　題

$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} > \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ であることを証明せよ。

(解) $0 \leqq x \leqq 1$ であるから，$x^2 \leqq x$　つまり　$1+x^2 \leqq 1+x$

これより，$\dfrac{1}{1+x^2} \geqq \dfrac{1}{1+x}$

恒等的に $\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{1+x}$ ではないから，$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} > \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ である。(等号がいらない)

例　題

$\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n}$ を証明せよ

(解) 関数 $f(x) = \frac{1}{x}$ について考える。これは減少関数だから

ある区間 $k < x < k+1$ において，$f(k+1) < f(x) < f(k)$

つまり　$\frac{1}{k+1} < \frac{1}{x} < \frac{1}{k}$ となる。

上の式の $\frac{1}{x} < \frac{1}{k}$ の部分に注目すると，いま区間で $k < x < k+1$ で $f(x) > 0$ であるから，

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{k}$$

k は定数だから，$\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} < \frac{1}{k}$　…　①

①で $k = 1$，2，3，$\cdots\cdots$，n とおいて次々に式を作ると

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} < \frac{1}{1},\quad \int_2^3 \frac{dx}{x} < \frac{1}{2},\quad \int_3^4 \frac{dx}{x} < \frac{1}{3},\quad \cdots\cdots,\quad \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} < \frac{1}{n}$$

両辺をそれぞれすべて加えて，

$$\boxed{\int_1^2 \frac{dx}{x} + \int_2^3 \frac{dx}{x} + \int_3^4 \frac{dx}{x} + \cdots\cdots + \int_n^{n+1} \frac{dx}{x}} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n}$$

左辺は積分の性質より，

$$\boxed{\int_1^{n+1} \frac{dx}{x}} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n}$$

左辺を計算すると，$\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \Big[\log|x|\Big]_1^{n+1} = \log(n+1)$

よって，$\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n}$

この方法は難しいですね。どうしてそんなことが思いつくの？　というような部分がたくさんあるのではないでしょうか。

log と数列の和が混ざった不等式なので，普通の証明法では無理があります。

そこで，右辺が $f(x) = \frac{1}{x}$ を繰り返し加えたような形になっていることに注目。$f(x) = \frac{1}{x}$ を積分すると log が出てきますから，ますます積分を利用した証明法が怪しいことになります。

解答中の①の式を作ることができたら，あとは何とかなりそうです。独特の証明方法ですがワンパターンですので，ある程度の形を覚えておくとよいでしょう。