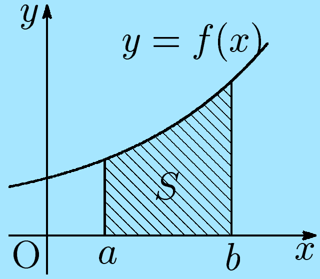
1　面　積

数学Ⅱで学んだことの復習になりますが，定積分と面積について，次のことが成り立ちます。

◇定積分と面積◇

$a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq 0$ のとき，

$$\boldsymbol{S = \int_a^b f(x)\,dx}$$

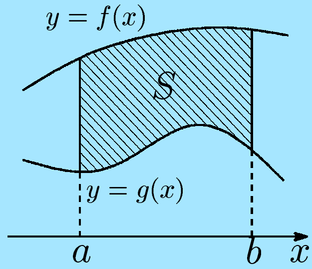


上のことから，次の式も成り立つんでした。

◇2曲線で囲まれた部分の面積◇

$a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq g(x)$ のとき，

$$\boldsymbol{S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx}$$



では面積の求め方について，復習しておきましょう。

① まずグラフをかく。(大まかでよい)
② 面積を求める部分の，左端と右端の x 座標を確認する。(交点の x 座標を求める)
③ グラフの上下関係を確認する。($f(x)$ が上で，$g(x)$ が下という風に)
④ 定積分の式を作り，計算する。

面積を求める手順は，数学Ⅱのときと全く同じです。違うのは，数学Ⅲに入って，いろいろな関数を積分できるようになった点です。

いろいろなグラフで囲まれた部分の面積を，求めることができるようになりました。

例　題

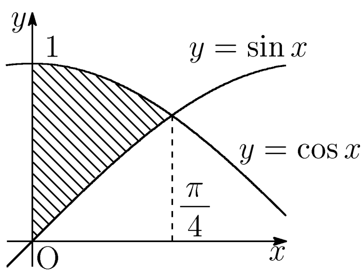
2曲線 $y = \sin x$，$y = \cos x$，及び y 軸によって囲まれた部分の面積を求めよ。

2つのグラフの共有点は $x = \dfrac{\pi}{4}$

区間 $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ において，

$$\cos x \geqq \sin x$$

であるから，求める面積は



$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\,dx = \Big[\sin x + \cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1$$

例　題

2 曲線 $y=\dfrac{6}{x}$，$y=-2x+8$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

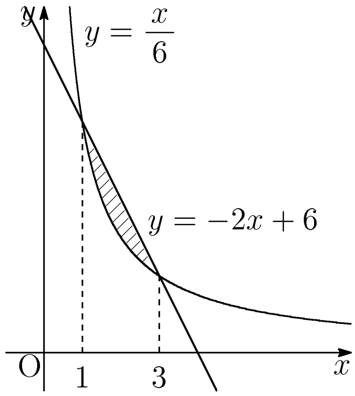
2 曲線の交点は $\dfrac{6}{x}=-2x+8$ より，$x=1$，3

区間 $1 \leqq x \leqq 3$ において，

$$-2x+8 \geqq \frac{6}{x}$$

であるから，求める面積は

$$\int_1^3 \left\{(-2x+8)-\frac{6}{x}\right\}dx=\Big[-x^2+8x-6\log x\Big]_1^3$$
$$=8-6\log 3$$



数学Ⅲでは，ただ面積を求めるだけでなく，接線の方程式を求めたり，グラフをかく際に増減表が必要だったりする場合があります。

これまでの微分，積分の知識をフルに活用する問題が多いです。

例　題

曲線 $y=\log x$ と，この曲線に原点 O から引いた接線と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。

$y=\log x$ より，$y'=\dfrac{1}{x}$

この接線の接点を $\mathrm{P}(t,\ \log t)$ とすると，

接線の方程式は

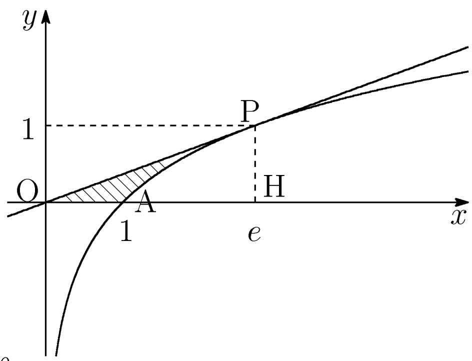
$$y-\log t=\frac{1}{t}(x-t)$$

この接線は原点 O を通るので，

$-\log t=\dfrac{1}{t}(-t)$，つまり，$t=e$

したがって，$\mathrm{P}(e,\ 1)$

求める面積は，$\triangle$ OPH$-$ 図形 APH より，



$$\frac{1}{2}\cdot e\cdot 1-\int_1^e \log x\,dx=\frac{e}{2}-\left\{\Big[x\log x\Big]_1^e-\int_1^e dx\right\}$$ → log の部分積分

$$=\frac{e}{2}-e+\Big[\,x\,\Big]_1^e=\frac{e}{2}-1$$