2　いろいろな図形の面積

円の面積が πr^2 であることは，小学校からずっと使ってきました。しかし，そのきちんとした証明はやっていませんでした。なぜなら，円の面積を厳密に説明するには積分が必要だったからです。

例　題

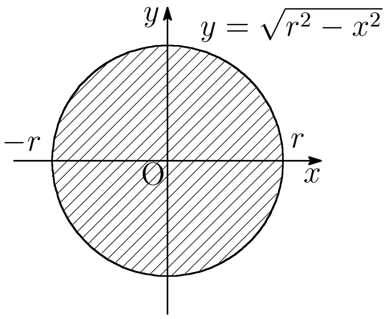
半径 r の円の面積を求めよ。

曲線 $x^2+y^2=r^2$ で囲まれた部分の面積を求めればよい。
この方程式を y について解くと，

$$y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$$

x 軸の上方にある部分は，

$$y=\sqrt{r^2-x^2}$$



この曲線は x 軸について対称であるから，求める面積 S は

$$S=2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx=2\cdot2\int_{0}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

… 偶関数の積分

$x=r\sin\theta$ とおくと，置換積分法より，

x	0	$\to$	r
θ	0	$\to$	$\dfrac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}S&=4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{r^2(1-\sin^2\theta)}(r\cos\theta\,d\theta)\\&=4r^2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=4r^2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2\theta}{2}\,d\theta\\&=2r^2\Big[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}\\&=\pi r^2\end{aligned}$$

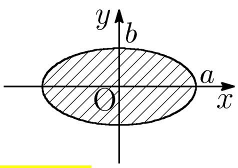
このことを利用して，楕円の面積も求めることができます。

例　題

曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ によって囲まれた部分の面積を求めよ。$(a>0,\ b>0)$

方程式を y について解くと，x 軸の上方にある部分は

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$



$$\therefore\ 面積\ S=2\int_{-a}^{a}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{4b}{a}\boxed{\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx}$$

$\boxed{\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx}$ は，半径 a の円の 4 分の 1 の面積に等しいから，

$$S=\frac{4b}{a}\cdot\boxed{\frac{\pi a^2}{4}}=\pi ab$$

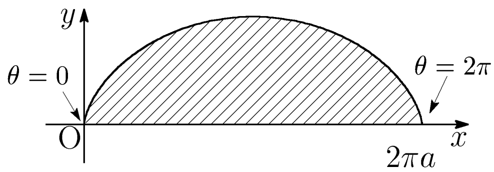
媒介変数で表示された曲線で囲まれた部分の面積も，求めることができます。

例　題

a は正の定数とする。サイクロイド

$$x = a(\theta - \sin\theta), \qquad y = a(1 - \cos\theta)$$

の $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の部分と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。



求める面積を S とすると，

$$S = \int_0^{2\pi a} y\,dx$$

$x = a(\theta - \sin\theta)$ だから，$\dfrac{dx}{d\theta} = a(1 - \cos\theta)$

よって，積分の変数を θ に変えると

x	$0 \to 2\pi a$
θ	$0 \to 2\pi$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} a(1-\cos\theta)\{a(1-\cos\theta)d\theta\} \\ &= a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2\,d\theta \\ &= a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta \\ &= a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta \\ &= a^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta \\ &= a^2\Big[\frac{3}{2}\theta-2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\Big]_0^{2\pi} \\ &= 3\pi a^2 \end{aligned}$$