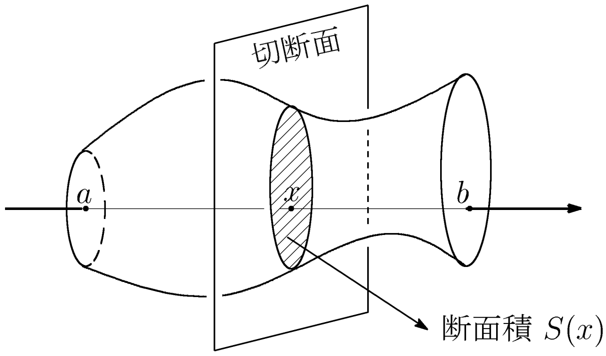
3　体積

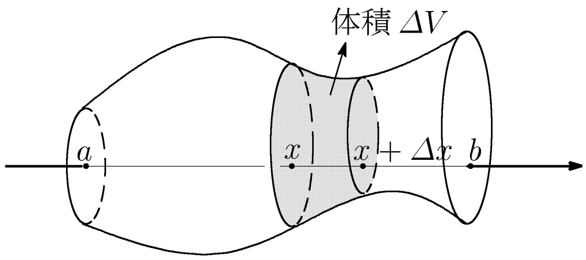
立体図形の体積を求めるのに，積分を利用できる場合があります。

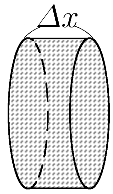
ある立体図形に，図のように軸を突き刺し，地点 x で軸に垂直に切断したときの断面積を表す式 $S(x)$ が計算できたとしましょう。この立体の，地点 a から地点 b までの部分の体積 V を求めることを考えます。



そのための準備をします。

まず，地点 a から地点 x までの部分の体積を $V(x)$，地点 x からの増分を Δx，これによる体積の増分を ΔV とおきます。





体積 ΔV の円柱

図の，増加した体積に注目します。体積が ΔV で，高さが Δx の円柱について，その底面積は $\dfrac{\Delta V}{\Delta x}$ となりますが，Δx が小さければ小さいほど，この底面積ははじめの切断面の面積 $S(x)$ に近くなります。つまり，

$$S(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = \boldsymbol{V'(x)}$$

このことから，$V(x) = \displaystyle\int S(x)\,dx$ であることが分かります。

求める体積 V は $V(b)$ に等しいわけですが，$V(a) = 0$ ですので，

$$V = V(b) - V(a) = \Big[V(x)\Big]_a^b = \int_a^b S(x)\,dx$$

体積は，断面積の定積分を計算すれば求められることになります。

◇立体の体積◇

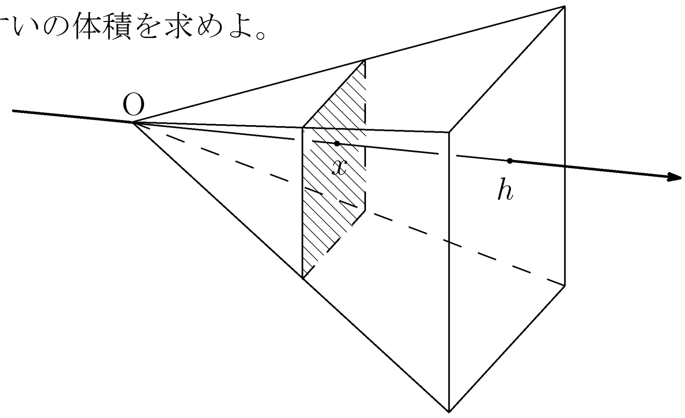
$a < b$ のとき，　$\boldsymbol{V = \displaystyle\int_a^b S(x)\,dx}$

「面積を積み重ねると体積になる」ということを表す公式です。ポテトチップスのような薄いスライスを想像してもらうといいのですが，薄いスライスを全部くっつけるともとの１個のジャガイモになりますよね。そういうイメージです。

ちなみに，「線分を積み重ねると面積になる」ということは既に知っている公式から分かります。$S = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ という公式です。$f(x)$ というのは関数の y 座標，つまり長さを持った縦線分だと考えられます。それをびっしり集めてくっつけたものが面積です。

例　題

底面積 S，高さ h の四角すいの体積を求めよ。



四角すいの頂点を原点に置き，底面の向きに x 軸を垂直に通す。このとき，$0 \leqq x \leqq h$ である。

地点 x における断面積を計算すると，断面と底面は相似である。
相似比は $x:h$ であるから，面積比は $x^2:h^2$.　これより

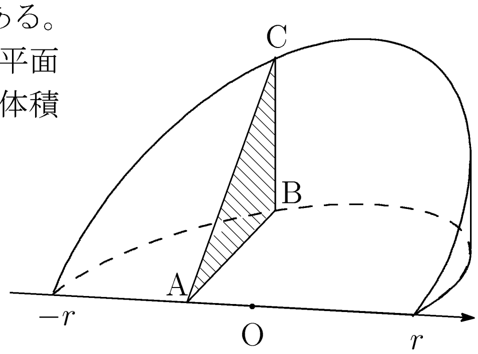
$$S(x) = \left(\frac{x}{h}\right)^2 S = \frac{S}{h^2}x^2$$

よって，$V = \displaystyle\int_0^h \frac{S}{h^2}x^2\,dx = \frac{S}{h^2}\Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_0^h = \frac{1}{3}Sh$

上の例題は「○○すい」の体積を求めるとき $\dfrac{1}{3}$ をかける理由の証明になっています。

例　題

中心 O，半径 r の円を底面とする円柱がある。点 O を通り，底面と 30° の角度で交わる平面によってこの円柱が切り取られる部分の体積を求めよ。



O を原点，底面と切り取る平面との交線を x 軸とする。
この立体を軸上の地点 x で垂直に切断したときの切り口を△ ABC とする。
この面積 $S(x)$ について

$$\mathrm{AB} = \sqrt{r^2 - x^2}, \qquad \mathrm{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{r^2 - x^2}$$

であるから，

$$S(x) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{r^2 - x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{r^2 - x^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(r^2 - x^2)$$

よって求める体積は

$$V = \int_{-r}^{r} \frac{1}{2\sqrt{3}}(r^2 - x^2)\,dx = \frac{1}{2\sqrt{3}}\Big[r^2x - \frac{1}{3}x^3\Big]_{-r}^{r} = \frac{2\sqrt{3}}{9}r^3$$