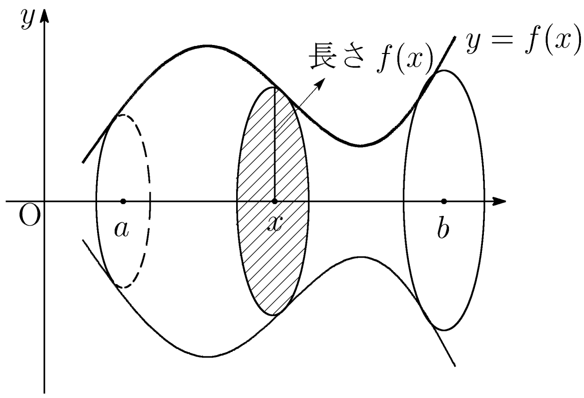
4　回転体の体積

$a < b$ のとき，曲線 $y = f(x)$ と $x = a$，$x = b$ で囲まれた部分を，x 軸を中心に回転させた立体の体積 V を求めてみましょう。



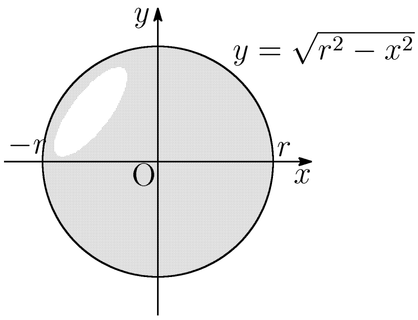
地点 x での断面積 $S(x)$ が分かれば体積は求められるわけですが，この立体は**回転体**ですから，切断面は半径 $f(x)$ の円です。
つまり，$S(x) = \pi\{f(x)\}^2$ となりますから，次の公式で回転体の体積は求められます。

◇ 回転体の体積 ◇

$$a < b \text{ のとき，} \quad V = \pi\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx = \pi\int_a^b y^2\,dx$$

例　題

半径 r の球の体積を求めよ。



半径 r の球は，円 $x^2 + y^2 = r^2$ の上半分である曲線

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad (-r \leqq x \leqq r)$$

を，x 軸の周りに 1 回転させてできる図形である。

よって求める体積は，

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_{-r}^{r} y^2\,dx = \pi\int_{-r}^{r}(\sqrt{r^2 - x^2})^2\,dx \\ &= \pi\int_{-r}^{r}(r^2 - x^2)\,dx = \pi\Big[r^2x - \frac{1}{3}x^3\Big]_{-r}^{r} \\ &= \pi\Big\{\Big(r^3 - \frac{1}{3}r^3\Big) - \Big(-r^3 + \frac{1}{3}r^3\Big)\Big\} \\ &= \frac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

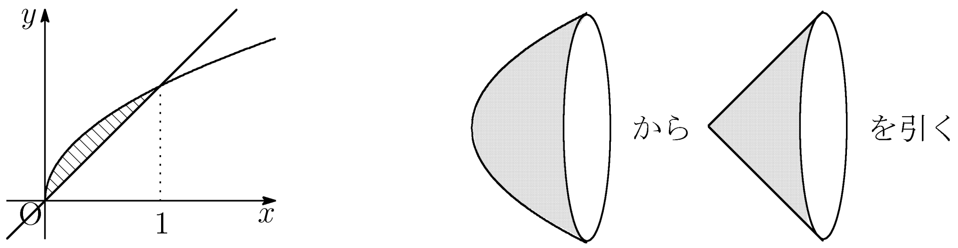
半径 r の円の面積が πr^2 になる理由は既に積分を用いて証明しましたが，今回は球の体積についての証明です。これで，小中学校で習った公式のうち未だにきちんと証明がなされていないのは円周の長さの公式 $S = 2\pi r$ と，球の表面積の公式 $S = 4\pi r^2$ だけとなりました。

円周の長さの公式は次の節で証明します。ただ，残念ながら球の表面積の公式は，高校で学習する範囲では説明できません。大学で「曲面の面積」という分野を学習してからになります。

例　題

次の図形を，x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

(1) $y=\sqrt{x}$ と $y=x$ で囲まれた図形

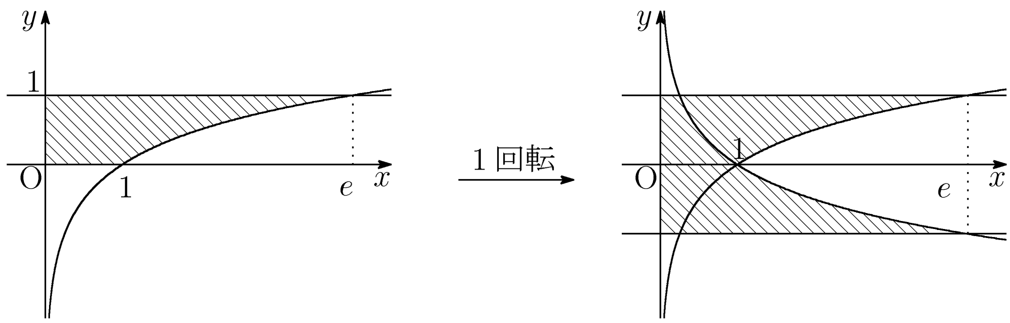


出来上がる立体は，つりがね形の立体から，円すいを抜き取った立体である。

よって求める体積は

$$V=\boxed{\pi\int_0^1(\sqrt{x})^2\,dx}-\boxed{\pi\int_0^1 x^2\,dx}$$
$$=\pi\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1-\pi\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$
$$=\frac{\pi}{6}$$

(2) $y=\log x$，$y=1$，x 軸，y 軸で囲まれた図形



円柱からどんぐり形の立体をくりぬいた立体となるから，

$$V=\boxed{\pi\int_0^e 1^2\,dx}-\boxed{\pi\int_1^e(\log x)^2\,dx}$$
$$=\pi\Big[\ x\ \Big]_0^e-\pi\left\{\Big[x(\log x)^2\Big]_1^e-\int_1^e 2\log x\,dx\right\}$$ ⋯ 部分積分 1 回目
$$=\pi e-\pi\left\{e-2\Big[x\log x\Big]_1^e+2\int_1^e dx\right\}$$ ⋯ 部分積分 2 回目
$$=2\pi$$