基本問題を確認しよう

数Ⅱ　不等式の証明(解答)

1 (1) $x^2-2x+1=(x-1)^2 \geqq 0$

(2) (左辺) $-$ (右辺) $=2(x^2+y^2)-(x+y)^2=x^2-2xy+y^2=(x-y)^2 \geqq 0$

2 (左辺) $-$ (右辺) $=ac+bd-(ad+bc)=ac-ad-bc+bd=a(c-d)-b(c-d)=(a-b)(c-d)$

$a>b$，$c>d$ より，$a-b>0$，$c-d>0$ であるから，$(a-b)(c-d)>0$

よって，$ac+bd>ad+bc$

3 $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$，$\sqrt{a+b}>0$ なので，両辺を2乗して比較する。

(左辺)^2 $-$ (右辺)^2 $=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2=a+2\sqrt{ab}+b-(a+b)=2\sqrt{ab}>0$

これより，(左辺)^2 $>$ (右辺)^2

よって，(左辺) $>$ (右辺)　つまり $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$

4 $|a|+|b|>0$，$|a+b|>0$ なので，両辺を2乗して比較する。

(左辺)^2 $-$ (右辺)^2 $=(|a|+|b|)^2-(|a+b|)^2=a^2+2|a||b|+b^2-(a+b)^2=2(|ab|-ab)$

絶対値の性質より，$|ab|>ab$ だから，$|ab|-ab>0$

よって，$2(|ab|-ab)>0$

これより，(左辺)^2 $>$ (右辺)^2

ゆえに，(左辺) $>$ (右辺)　つまり $|a|+|b|>|a+b|$

5 $a>0$，$\dfrac{1}{a}>0$ なので，相加平均・相乗平均の大小関係より

$$a+\frac{1}{a} \geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}$$

よって，$a+\dfrac{1}{a} \geqq 2$

等号が成り立つのは，$a=\dfrac{1}{a}$ のとき。つまり $a^2=1$ だから，$a>0$ より $a=1$ のときである。