応用問題に挑戦

数Ⅱ　不等式の証明(解答)

■1　(左辺)$= 1 + \dfrac{2a}{b} + \dfrac{2b}{a} + 4 = \dfrac{2a}{b} + \dfrac{2b}{a} + 5$ … ①

$\dfrac{2a}{b} > 0$，$\dfrac{2b}{a} > 0$ だから，相加平均・相乗平均の大小関係より

$$\frac{2a}{b} + \frac{2b}{a} \geqq 2\sqrt{\frac{2a}{b} \cdot \frac{2b}{a}} = 4$$

よって，$\dfrac{2a}{b} + \dfrac{2b}{a} \geqq 4$

これより，$\dfrac{2a}{b} + \dfrac{2b}{a} + 5 \geqq 9$

①より，$(a+2b)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{b}\right) \geqq 9$

■2　(右辺)^2 − (左辺)^2 $= \dfrac{x^4+2x^2+1}{4} - x^2 = \dfrac{x^4+2x^2+1-4x^2}{4} = \dfrac{(x^2-1)^2}{4} \geqq 0$

よって，(左辺)$^2 \geqq$ (右辺)^2

$|x| > 0$，$\dfrac{x^2+1}{2} > 0$ なので，(左辺) $>$ (右辺)　すなわち $|x| \geqq \dfrac{x^2+1}{2}$

■3　(左辺) − (右辺) $= a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = \dfrac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$$= \frac{1}{2}(a^2+a^2+b^2+b^2+c^2+c^2-2ab-2bc-2ca)$$
$$= \frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2)$$
$$= \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \geqq 0$$

よって，$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \geqq 0$