応用問題に挑戦

数A　二項定理

■1　次の式を展開したときに現れる，[　　]内の項の係数を求めなさい。

(1) $(1-2x)^9$　[x^4]

$${}_9C_4(1)^5\cdot(-2x)^4 = 126\cdot 16x^4$$
$$= 2016x^4 \qquad \underline{\underline{2016}}$$

(2) $\left(2x^4-\dfrac{1}{x}\right)^{10}$　[x^{20}]

$${}_{10}C_4(2x^4)^6\left(-\frac{1}{x}\right)^4 = 210\times 64x^{24}\cdot\frac{1}{x^4}$$
$$= 1920x^{20}$$
$$\therefore\ \underline{\underline{1920}}$$

一般項は
${}_{10}C_r(2x^4)^{10-r}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^r$
文字の次数だけ見ると
$x^{40-4r}\times\frac{1}{x^r}$
$=x^{40-5r}$
$\therefore\ 40-5r=20$
$r=4$

表で探してもよい。

$2x^4$	$-\frac{1}{x}$	できる項
10乗	0乗 →	x^{40}
9	1 →	x^{35}
8	2 →	x^{30}
⋮		⋮
6	4	x^{20}
⋮		⋮
0	20 →	$\frac{1}{x^{20}}$

(3) $(x-2y+z)^5$　[x^2yz^2]

$$\frac{5!}{2!\,1!\,2!}x^2\cdot(-2y)^1\cdot z^2$$
$$= 30x^2\cdot(-2)y\cdot z^2$$
$$= -60x^2yz^2 \qquad \therefore\ \underline{\underline{-60}}$$

■2　$(1+x)^n$ の展開式を利用して，等式 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots\cdots+{}_nC_n=2^n$ を証明しなさい。

$x=1$として　二項定理より

$$(1+1)^n = {}_nC_0 1^n + {}_nC_1\cdot 1^{n-1}\cdot 1^1 + {}_nC_2\cdot 1^{n-2}\cdot 1^2 + \cdots + {}_nC_n 1^n$$

$$\therefore\ 2^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n$$