応用問題に挑戦

数Ⅱ　対数関数(解答)

■1　真数条件より，$x-4>0$ かつ $x-1>0$　$\therefore x>4 \cdots$ ①

$2\log_{10}(x-4)-\log_{10}4(x-1)<0$ より，$\log_{10}(x-4)^2<\log_{10}4(x-1)$

底 $10>1$ より，$(x-4)^2<4(x-1)$

$x^2-12x+20<0$　　$(x-2)(x-10)<0$　　$\therefore 2<x<10$

①とあわせて，$4<x<10$

■2　$\log_2 x=X$ とおくと，$x \geqq 1$ より，$\log_2 x \geqq \log_2 1$　$\therefore X \geqq 0 \cdots$ ①

$y=2\log_2 x-(\log_2 x)^2=-X^2+2X=-(X-1)^2+1$ より，$X=1$ のとき最大値 1 をとる。

このとき，$\log_2 x=1$ だから，$x=2$

以上から，$x=2$ のとき，最大値 1

■3　$2^x=3^y=18^z$ より，$x=\log_2 18^z$，$y=\log_3 18^z$

これを求める式に代入して，

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}=\frac{1}{\log_2 18^z}+\frac{2}{\log_3 18^z}-\frac{1}{z}=\frac{z\log_3 18^z+2z\log_2 18^z-\log_2 18^z\log_3 18^z}{z\log_2 18^z\log_3 18^z}$$

$$=\frac{z^2\log_3 18+2z^2\log_2 18-z^2\log_2 18\log_3 18}{z\log_2 18^z\log_3 18^z}$$

$$\begin{aligned}(\text{分子})&=z^2(\log_3 18+2\log_2 18-\log_2 18\log_3 18)\\&=z^2\{(\log_3 2+2)+2(1+2\log_2 3)-(1+2\log_2 3)(\log_3 2+2)\}\\&=z^2\{4+\log_3 2+4\log_2 3-(\log_3 2+2+2\log_2 3\log_3 2+4\log_3 2)\}\\&=z^2\{4+\log_3 2+4\log_2 3-(\log_3 2+2+2+4\log_3 2)\}=0\end{aligned}$$

よって，求める値は 0 である。