基本問題を確認しよう

数B　等比数列の和

等比数列の和　初項 a の等比数列の第 n 項目までの和は

$r \neq 1$ のとき，$S_n = \dfrac{a(1-r)^n}{1-r} = \dfrac{a(r-1)^n}{r-1}$

$r = 1$ のとき，$S_n = na$

1 次の等~~差~~比数列の和を求めなさい。

(1) 初項が 1，公比が 2，項数が 8

$$S_8 = \frac{1\cdot(2^8-1)}{2-1} = \underline{\underline{255}}$$

(2) 初項 1，末項が -1，項数が 10

公比を r とおくと，$a_n = 1\cdot r^{n-1} = r^{n-1}$

$a_{10} = -1$ より　$r^9 = -1$　$\therefore\ r = -1$

よって，$S_{10} = \dfrac{1\cdot\{1-(-1)^{10}\}}{1-(-1)} = \dfrac{1-1}{2} = \underline{\underline{0}}$

(3) $\dfrac{2}{3} + 1 + \dfrac{3}{2} + \dfrac{9}{4} + \cdots\cdots + \dfrac{2}{3}\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$

初項 $\frac{2}{3}$，公比 $\frac{3}{2}$，項数 n　最後の項は一般項だから。

$$\therefore\ S_n = \frac{\frac{2}{3}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right\}}{\frac{3}{2}-1} = \frac{\frac{2}{3}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right\}}{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\frac{4}{3}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right\}}}$$

(4) $1 - 3 + 9 - 27 + \cdots\cdots - 2187$

初項 1，公比 -3，一般項は $a_n = (-3)^{n-1}$ より，末項について

$(-3)^{n-1} = -2187 = (-3)^7$　$\therefore\ n-1 = 7$ より　$n = 8$。末項は第8項。

$$S_8 = \frac{1\cdot\{1-(-3)^8\}}{1-(-3)} = \frac{1-6561}{4} = \frac{-6560}{4} = \underline{\underline{-1640}}$$

2 初項が 2，公比が 3 である等比数列の，初項から第 n までの和が 242 であるとき，n の値を求めなさい。

$$S_n = \frac{2(3^n-1)}{3-1} = 242$$

$$2(3^n-1) = 484$$

$$3^n - 1 = 242 \qquad \therefore\ 3^n = 243 = 3^5$$

よって $\underline{\underline{n = 5}}$