応用問題に挑戦

数B　和の記号$\sum$

■1　次の数列の初項から第n項までの和を求めなさい。

(1) 1^2, 3^2, 5^2, 7^2, $\cdots$

この数列の一般項は $(2n-1)^2$ より

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)$$

$$= 4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 4\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + n$$

$$= \frac{4}{3}n^3 + 2n^2 + \frac{2}{3}n - 2n^2 - 2n + n$$

$$= \underline{\underline{\frac{4}{3}n^3 - \frac{1}{3}n}}$$

(2) $1\cdot4$, $4\cdot7$, $7\cdot10$, $10\cdot13$, $\cdots$

この数列の一般項は $(3n-2)\cdot(3n+1)$ より

$$\sum_{k=1}^{n}(3k-2)(3k+1) = \sum_{k=1}^{n}(9k^2-3k-2)$$

$$= 9\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 3\cdot\frac{1}{2}n(n+1) - 2n$$

$$= 3n^3 + \frac{9}{2}n^2 + \frac{3}{2}n - \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n - 2n$$

$$= \underline{\underline{3n^3 + 3n^2 - 2n}}$$

■2　次の和を，$\sum$の計算を使って求めなさい。

$1\cdot n$, $2(n-1)$, $3(n-2)$, $\cdots\cdots$, $(n-2)\cdot2$, $n\cdot1$

この数列の第k項は　$k\{n-(k-1)\} = k(n-k+1)$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}k(n-k+1) = \sum_{k=1}^{n}(nk-k^2+k)$$

$$= n\sum_{k=1}^{n}k - \sum_{k=1}^{n}k^2 + \sum_{k=1}^{n}k$$

$$= n\cdot\frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)\{3n-(2n+1)+3\}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)}}$$

$\left(\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{3}n\right.$ でもよい

NANCHINA