応用問題に挑戦

数B　階差数列

■1　次の数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$，さらに $\{b_n\}$ の階差数列を $\{c_n\}$ とするとき，次の問に答えなさい。

0，4，18，48，100，180，294，…

(1) $\{c_n\}$ の一般項を求めなさい。

$\{b_n\}$: 4, 14, 30, 52, 80, 114 …

$\{c_n\}$: 10, 16, 22, 28, 34 …

よって　$c_n = 6n+4$

(2) $\{b_n\}$ の一般項を求めなさい。

$n \geqq 2$ のとき、 $b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k = 4 + \sum_{k=1}^{n-1}(6k+4)$

$= 4 + 6 \cdot \frac{1}{2}n(n-1) + 4(n-1)$

$= 3n^2+n$

これは $n=1$ のときも成り立つので、 $b_n = 3n^2+n$

(3) $\{c_n\}$ の一般項を求めなさい。

$n \geqq 2$ のとき、 $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 0 + \sum_{k=1}^{n-1}(3k^2+k)$

$= 3 \cdot \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) + \frac{1}{2}n(n-1)$

$= \frac{1}{2}n(n-1)(2n-1+1) = n^2(n-1)$

これは $n=1$ のときも成り立つので、 $a_n = n^2(n-1) = n^3 - n^2$

■2　初項から第 n 項までの和が $S_n = n^2 - 3n + 1$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい。

$n=1$ のとき、 $a_1 = S_1 = -1$

$n \geqq 2$ のとき、 $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - 3n + 1 - \{(n-1)^2 - 3(n-1) + 1\}$

$= n^2 - 3n + 1 - (n^2 - 5n + 5)$

$= 2n - 4$

これは $n=1$ のときは成り立たないので

$a_n = \begin{cases} -1 & (n=1) \\ 2n-4 & (n \geqq 2) \end{cases}$