応用問題に挑戦

数B　いろいろな数列の和

■1　次の和を求めなさい。

(1) $1\cdot 1+3\cdot 3+5\cdot 3^2+7\cdot 3^3+\cdots\cdots+(2n-1)\cdot 3^{n-1}$

この和をSとおき、$S-3S$を計算すると

$$S=1\cdot1+3\cdot3+5\cdot3^2+7\cdot3^3+\cdots+(2n-1)\cdot3^{n-1}$$
$$-)\ 3S=1\cdot3+3\cdot3^2+5\cdot3^3+\cdots+(2n-3)\cdot3^{n-1}+(2n-1)\cdot3^n$$
$$-2S=1\cdot1+2\cdot3+2\cdot3^2+2\cdot3^3+\cdots+2\cdot3^{n-1}-(2n-1)\cdot3^n$$
$$=1+\frac{6(3^{n-1}-1)}{3-1}-(2n-1)\cdot3^n=-2-2(n-1)\cdot3^n$$
$$\therefore\ \underline{\underline{S=1+(n-1)\cdot3^n}}$$

(2) $1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots+nx^{n-1}$

(i) $x\neq1$のとき
$$S=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+nx^{n-1}$$
$$-)\ xS=x+2x^2+3x^3+\cdots+(n-1)x^{n-1}+nx^n$$
$$(1-x)S=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}-nx^n$$
$$=\frac{1\cdot(1-x^n)}{1-x}-nx^n=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{1-x}\qquad\therefore\ \underline{\underline{S=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}}}$$

(ii) $x=1$のとき　$S=1+2+3+4+\cdots+n=\underline{\underline{\frac{1}{2}n(n+1)}}$

■2　1から始まる奇数の列を，次のようにn群がn個の数を含むように分ける。

1 | 3　5 | 7　9　11 | 13　15　17　19 | 21 $\cdots$

(1) 第n群の最初の項を求めなさい。

各群の項数は　1, 2, 3, 4, $\cdots$　なので、
第n群の最初の項は、先頭から数えて
$$\{1+2+3+4+\cdots+(n-1)\}+1\ \text{項目}$$
$$=\frac{1}{2}n(n-1)+1=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+1\ \text{項目。}$$
この項番号を、一般項 $a_n=2n-1$ に代入して、　$2\left(\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+1\right)-1$

ここ

$$=\underline{\underline{n^2-n+1}}$$

(2) 第n群の総和を求めなさい。

第n群の初項は n^2-n+1
末項は、第n+1群の初項の1つ手前なので、
$$(n+1)^2-(n+1)+1\quad-2$$
$$=n^2+n-1$$
よって等差数列の和の公式より
$$\frac{1}{2}n\{(n^2-n+1)+(n^2+n-1)\}=\underline{\underline{n^3}}$$