基本問題を確認しよう

数B　数列の漸化式

数列の漸化式

1 $a_{n+1} = a_n + d$　… 公差 d の等差数列
2 $a_{n+1} = ra_n$　… 公比 r の等比数列
3 $a_{n+1} - a_n = (n$ の式$)$　… 階差数列を利用する数列
4 $a_{n+1} = pa_n + q$　… 変形を利用する数列

変形を利用する数列の漸化式　$a_{n+1} = pa_n + q$
特性方程式 $\alpha = p\alpha + q$ を解き，$a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$ と変形する。

1 次のように定義される数列の，初項から第5項までを書きなさい。

(1) $a_1 = 3$，$a_{n+1} = {a_n}^2$

$n=1, 2, 3, \cdots$ と代入すると，

$a_2 = {a_1}^2 = 3^2 = 9$　　$a_4 = {a_3}^2 = 81^2 = 6561$
$a_3 = {a_2}^2 = 9^2 = 81$　　$a_5 = {a_4}^2 = 6561^2 = 43046721$

$\therefore$ $\underline{\underline{3,\ 9,\ 81,\ 6561,\ 43046721}}$

(2) $a_1 = 3$，$a_{n+1} = 2a_n - 5$

$a_2 = 2a_1 - 5 = 1$
$a_3 = 2a_2 - 5 = -3$
$a_4 = 2a_3 - 5 = -11$
$a_5 = 2a_4 - 5 = -27$

$\therefore$ $\underline{\underline{3,\ 1,\ -3,\ -11,\ -27}}$

2 次のように定義される数列の一般項を求めなさい。

(1) $a_1 = 3$，$a_{n+1} = a_n + 5$

初項3，公差5の等差数列より

$a_n = 3 + 5(n-1) = \underline{\underline{5n-2}}$

(2) $a_1 = 1$，$a_{n+1} = 3a_n$

初項1，公比3の等比数列より

$a_n = 1 \cdot 3^{n-1} = \underline{\underline{3^{n-1}}}$

(3) $a_1 = 4$，$a_{n+1} = 2a_n + 3$

(特性方程式より，$\alpha = 2\alpha + 3$　$\therefore \alpha = -3$)　$a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3)$ と変形

数列 $\{a_n + 3\}$ は初項 $a_1 + 3 = 7$，公比2の等比数列なので，

$a_n + 3 = 7 \cdot 2^{n-1}$　$\therefore$ $\underline{\underline{a_n = 7 \cdot 2^{n-1} - 3}}$

(4) $a_1 = -2$，$a_{n+1} - a_n = 2^n$

$n \geqq 2$ のとき，$a_n = -2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k$

$= -2 + \dfrac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} = -2 + 2^n - 2 = 2^n - 4$

$n=1$ のときも成り立つので　$\underline{\underline{a_n = 2^n - 4}}$