応用問題に挑戦

数B　数列の漸化式

■1　次のように定義される数列の一般項を求めなさい。

(1) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 1 - 2a_n$

（特性方程式 $\alpha = 1 - 2\alpha$ より、$\alpha = \frac{1}{3}$）

変形して、$a_{n+1} - \frac{1}{3} = -2\left(a_n - \frac{1}{3}\right)$

数列 $\left\{a_n - \frac{1}{3}\right\}$ は初項 $a_1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$，公比 -2 の等比数列より

$a_n - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\cdot(-2)^{n-1}$　∴ $a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot(-2)^{n-1}$

(2) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 2(\overset{n}{\cancel{k}} + 1)$

階差数列の一般項が $2(n+1)$ なので

$n \geqq 2$ のとき、$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2(k+1) = 2 + 2\cdot\frac{1}{2}n(n-1) + 2(n-1)$

$= n^2 + n$

これは $n=1$ のときも成り立つので、$a_n = n^2 + n$

(3) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{3 - a_n}$

漸化式の両辺の逆数をとって $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{3 - a_n}{a_n} = \frac{3}{a_n} - 1$

$b_n = \frac{1}{a_n}$ とおくと、$b_{n+1} = 3b_n - 1$

これは $b_{n+1} - \frac{1}{2} = 3\left(b_n - \frac{1}{2}\right)$ と変形できる。

∴ $b_n - \frac{1}{2} = \left(b_1 - \frac{1}{2}\right)\cdot 3^{n-1} = \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{2}\right)\cdot 3^{n-1} = \frac{1}{2}\cdot 3^{n-1}$

よって $b_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 3^{n-1} = \frac{1 + 3^{n-1}}{2}$　∴ $a_n = \frac{2}{1 + 3^{n-1}}$

■2　平面上に n 本の直線があって，そのどの2本も平行ではなく，どの3本も1点で交わらないとする。これら n 本の直線で分けられる平面の個数を a_n とするとき，a_n を n の式で表しなさい。

n 本引かれている状態で、平面は a_n 個。

ここに $n+1$ 本目をひくと、平面は $n+1$ 個増えるので

$a_{n+1} = a_n + (n+1)$

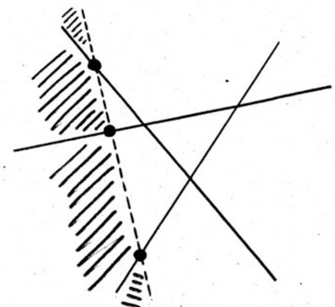
が成り立つ。$a_1 = 2$ であるから

$n \geqq 2$ のとき、$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)$

$= 2 + \frac{1}{2}n(n-1) + n - 1$

$= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1$

$n=1$ のときも成り立つ。



3本ひかれているとき、4本目をひくと平面は4つ増える。

$a_3 + 4 = a_4$