基本問題を確認しよう

数B　数学的帰納法

数学的帰納法　自然数nに関するある命題があって，
(Ⅰ) $n=1$のとき成立する。
(Ⅱ) $n=k$のときに成り立つと仮定すると，$n=k+1$のときにも成り立つ。
この(Ⅰ)，(Ⅱ)を証明すれば，この命題はすべての自然数nについて成立する。

1 $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$であることを，数学的帰納法によって証明しなさい。

(Ⅰ) $n=1$のとき　(左辺)$=1^2=1$，(右辺)$=\frac{1}{6}\cdot1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot1+1)=1$
よって成り立つ。

(Ⅱ) $n=k$のとき成り立つと仮定すると

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

両辺に$(k+1)^2$を加えて

$$\begin{aligned}1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2&=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2\\&=\frac{1}{6}(k+1)\{k(2k+1)+6(k+1)\}\\&=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)\\&=\frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}\end{aligned}$$

よって$n=k+1$のときも成り立つ。
(Ⅰ)(Ⅱ)より，すべての自然数について成り立つ。

2 nが3以上の自然数のとき，不等式$3^n>5n$を証明しなさい。

(Ⅰ) $n=3$のとき，(左辺)$=3^3=27$，(右辺)$=5\cdot3=15$　よって成り立つ。

(Ⅱ) $n=k$ $(k\geqq3)$のとき成り立つと仮定すると

$$3^k>5k$$

両辺を3倍して，$3\cdot3^k>15k$

$$\therefore\ 3^{k+1}>15k\ \cdots ①$$

ここで，$15k$と$5(k+1)$の大小を比較すると

$$15k-5(k+1)=10k-5>0\ (\because k\geqq0)$$

よって　$15k>5(k+1)$ $\cdots$ ②

①②より，$3^{k+1}>5(k+1)$

よって，$n=k+1$のときも成り立つ。
(Ⅰ)(Ⅱ)より，3以上の自然数について成り立つ。