応用問題に挑戦

数A　逆・裏・対偶，背理法

■1　命題「36の約数は，18の約数である」の逆，裏，対偶を述べ，その真偽を答えなさい。

逆：「18の約数は36の約数である」…真

裏：「36の約数でない数は、18の約数でない」…真

対偶：「18の約数でない数は、36の約数でない」…偽

■2　l，m，nを自然数とする。$l^2=m^2+n^2$が成り立つならばl，m，nのうち少なくとも1つは偶数であることを証明しなさい。

$l^2=m^2+n^2$ のとき、l, m, n がすべて奇数だと仮定すると

$l=2l'+1$，　$m=2m'+1$，　$n=2n'+1$ （l', m', n' は自然数）

とおける。このとき、

$l^2=(2l'+1)^2=4l'^2+4l'+1=2(2l'^2+2l')+1$ …奇数

$m^2+n^2=(2m'+1)^2+(2n'+1)^2=4m'^2+4m'+4n'^2+4n'+2$

$=2(2m'^2+2m'+2n'^2+2n'+1)$ …偶数

よって $l^2=m^2+n^2$ に矛盾するから、l, m, n の少なくとも1つは偶数

■3　$\sqrt{2}$は無理数であることを証明しなさい。

$\sqrt{2}$ が有理数と仮定すると $\sqrt{2}=\frac{n}{m}$ （m, n は互いに素な整数かつ $m \neq 0$）

とおける。　$n=\sqrt{2}m$ より　$n^2=2m^2$ …①

n^2 が偶数なので、n も偶数であるから

※証明は「基本問題を確認しよう」の2参照。

$n=2k$ （k は自然数） とおくと、①より

$(2k)^2=2m^2$

$4k^2=2m^2$　∴　$m^2=2k^2$

m^2 が偶数なので、m も偶数である。

ここまでで、m, n 共に偶数となってしまい、
m, n が互いに素であることに矛盾するから
$\sqrt{2}$ は無理数である。

NANCHINA