



基本問題を確認しよう

数B

ベクトルの内積

ベクトルの内積 なす角を θ とするとき, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$

また, $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ のとき, $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

内積の性質

- ① $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$, ② $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$
- ③ $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$, $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$
- ④ $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$ ただし k は実数

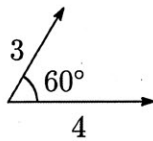
ベクトルの垂直と内積 $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

ベクトルのなす角 $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$, なす角を θ とするとき,

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

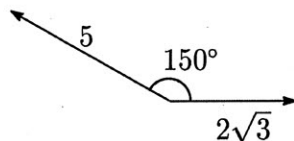
① 下のそれぞれの図について, ベクトルの内積を求めなさい。

(1)



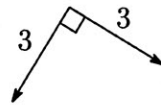
$$3 \times 4 \times \cos 60^\circ = 6$$

(2)



$$5 \times 2\sqrt{3} \times \cos 150^\circ = -15$$

(3)



$$3 \times 3 \times \cos 90^\circ = 0$$

② $\vec{a} = (2, 5)$, $\vec{b} = (3, -2)$ のとき, 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めなさい。

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 2 \times 3 + 5 \times (-2) \\ &= 6 - 10 = -4 \end{aligned}$$

③ $\vec{a} = (3, 5)$, $\vec{b} = (-3, x)$ が垂直となるように, x の値を定めなさい。

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= -9 + 5x = 0 \quad \text{より,} \\ x &= \frac{9}{5} \end{aligned}$$

④ $\vec{a} = (4, 2)$, $\vec{b} = (3, -1)$ のなす角を求めなさい。

なす角を θ とすると

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \quad \text{より,} \quad \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 12 - 2 = 10, \quad |\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10} \quad \text{より}$$

$$\cos \theta = \frac{10}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \quad \text{より} \quad \theta = 45^\circ$$

NANCHINA