応用問題に挑戦

数B　ベクトルの内積

■1　$\vec{a}=(4,\ -3)$ に垂直な単位ベクトルを求めなさい。

$\vec{e}=(x, y)$ とおくと，$|\vec{e}|=1$ より $\sqrt{x^2+y^2}=1$　∴ $x^2+y^2=1$ ①

$\vec{a}\cdot\vec{e}=0$ より，$4x-3y=0$　∴ $y=\frac{4}{3}x$ …②

①②より $x^2+\left(\frac{4}{3}x\right)^2=1$

$\frac{25}{9}x^2=1$

$x^2=\frac{9}{25}$

∴ $x=\pm\frac{3}{5}$

よって $y=\frac{4}{3}\times\left(\pm\frac{3}{5}\right)=\pm\frac{4}{5}$

$\vec{e}=\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right),\ \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

■2　2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{a}-2\vec{b}|=2\sqrt{13}$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を求めなさい。また，$|\vec{a}-\vec{b}|$ を求めなさい。

$|\vec{a}-2\vec{b}|=2\sqrt{13}$ の両辺を2乗して $|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=52$

$4-4\vec{a}\cdot\vec{b}+36=52$　∴ $\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$

$\vec{a}, \vec{b}$ のなす角を θ とすると，$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-3}{2\cdot3}=-\frac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より，$\theta=120^\circ$

また，$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4+6+9=19$ であり，

$|\vec{a}-\vec{b}|\geqq0$ なので，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{19}$

■3　$\vec{a}=(2,\ -1)$，$\vec{b}=(-3,\ 4)$ に対して，実数 t を変化させたとき,，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさ $|\vec{c}|$ の最小値と，そのときの t の値を求めなさい。

$\vec{c}=(2, -1)+t(-3, 4)=(-3t+2,\ 4t-1)$ より

$|\vec{c}|=\sqrt{(-3t+2)^2+(4t-1)^2}=\sqrt{25t^2-20t+5}=\sqrt{25\left(t-\frac{2}{5}\right)^2+1}$

根号内の2次関数より，$|\vec{c}|$ の最小値は $t=\frac{2}{5}$ のとき $\sqrt{1}=1$

NANCHINA