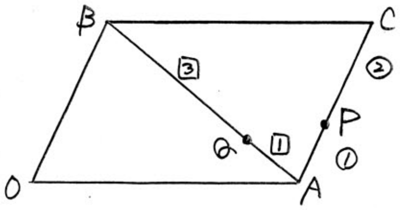
応用問題に挑戦

数B　位置ベクトルと図形への応用

■1　平行四辺形OA~~BC~~ CB の辺ACを1：2に内分する点をP，対角線ABを1：3に内分する点をQとするとき，3点O，P，Qは同一直線上にあることを証明しなさい。



$\vec{OA}=\vec{a}$，$\vec{OB}=\vec{b}$ とおくと，

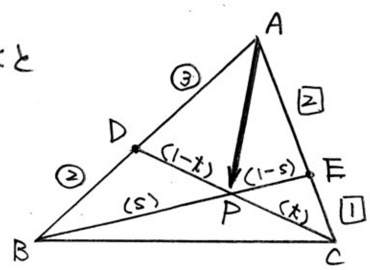
$$\vec{OP}=\vec{OA}+\vec{AP}=\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}=\frac{3\vec{a}+\vec{b}}{3}$$

$$\vec{OQ}=\frac{3\vec{a}+\vec{b}}{1+3}=\frac{3\vec{a}+\vec{b}}{4}$$

これより，$\vec{OP}=\frac{4}{3}\vec{OQ}$ と表せるので，$\vec{OP}\,/\!/\,\vec{OQ}$

すなわち，3点O，P，Qは同一直線上にある。

■2　△ABCにおいて，辺ABを3：2に内分する点をD，辺ACを2：1に内分する点をE，2直線BE，CDの交点をPとする。$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ として，$\overrightarrow{AP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表しなさい。



BP：PE＝s：(1−s)，　CP：PD＝t：(1−t) とおくと

$$\vec{AP}=(1-s)\vec{a}+\frac{2}{3}s\vec{b}$$

$$\vec{AP}=\frac{3}{5}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから，$\begin{cases}1-s=\frac{3}{5}t\\ \frac{2}{3}s=1-t\end{cases}$

$\therefore\ s=\frac{2}{3}$，$t=\frac{5}{9}$

よって，$\underline{\underline{\vec{AP}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}}}$

※ △CADと直線EBでメネラウスの定理より

$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{DP}{PC}=1$

∴ DP：PC＝4：5

$\therefore\ \vec{AP}=\frac{5\vec{AD}+4\vec{AC}}{4+5}$

$=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}$

■3　△ABCに対して等式 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ が成り立っているとき，点Pはどのような位置にあるか。

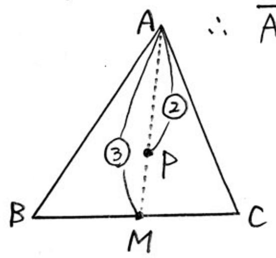
Aを基準に変形すると

$$-\vec{AP}+(\vec{AB}-\vec{AP})+(\vec{AC}-\vec{AP})=\vec{0}$$

$$-3\vec{AP}=-\vec{AB}-\vec{AC}$$

$$\therefore\ \vec{AP}=\frac{\vec{AB}+\vec{AC}}{3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\vec{AB}+\vec{AC}}{2}$$

$$=\frac{2}{3}\vec{AM}\quad(\text{MはBCの中点})$$



よって点Pは，<u>線分AMを2：1に内分する点</u>

<u>(△ABCの重心)</u>