

分母が0に収束する場合の極限

分母が0に収束する関数も、収束する場合がある。

例 1 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - x - 2}$
 (与式) $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 1} = 4$

上の例の場合、分母が0になる原因は、分母に含まれる $(x-2)$ という因数である。

分母が0になる原因である $(x-2)$ が消えなければ、全体は収束しない。つまり、全体が収束するためには分子も $(x-2)$ で割り切れなければならない。

● $\frac{f(x)}{g(x)}$ の収束 ●

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ かつ } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha \text{ (定数)} \implies \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

問題 1 次の極限值を求めよ。

(吉教科書 p.52 問 5)

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 + x - 2}$

(2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{x^3 + 1}$

問題 2 次の極限值を求めよ。

(吉教科書 p.52 問 6)

(1) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

問題 3

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+k} - 1}{x-2}$ が有限な値になるように、定数 k の値を定め、その極限值を求めよ。(吉教科書 p.53 問 7)

問題4 次の極限值を求めよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x})$

右極限・左極限

例 2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{|x|}$

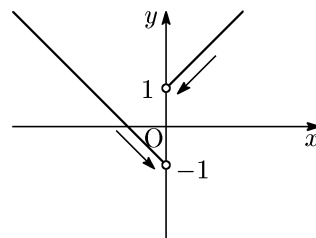
$f(x) = \frac{x^2 + x}{|x|}$ とすると, $f(x) = \begin{cases} -x - 1 & (x < 0) \\ x + 1 & (x > 0) \end{cases}$

「 $x \rightarrow 0$ 」とは言っても、小さいほうから 0 に近づく場合と、大きいほうから 0 に近づく場合とがある。通常はこれらを区別しなくても計算できるが、この例の場合は

x が「左から」0 に近づくとき, $f(x) \rightarrow \square$

x が「右から」0 に近づくとき, $f(x) \rightarrow \square$

のように、極限值が異なる。



こういった場合、 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ は確定しないので「存在しない」と答えることになるが、左右別々に考えれば極限值が存在する。

x が左から 0 に近づくときの極限值が -1 であるから、これを $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = -1$ と書き、

x が右から 0 に近づくときの極限值が 1 であるから、これを $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = 1$ と書く。

● **極限值の存在** ●

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ が存在する} \iff \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$$

問題5 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{|x|}$

(2) $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{x}{|x|}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x}{x-1}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x}{x-1}$